MATEMÁTICA
Especialização

Análise Real

Francinildo Nobre Ferreira
Adélia Conceição Diniz
Carlos Alberto Raposo da Cunha
Guilherme Chaud Tizziotti

ISBN 978-85-88414-73-0
9 788588 414730

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UFSJ UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
nead núcleo de educação a distância

UFSJ UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
nead núcleo de educação a distância

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira
Profª. Dra. Adélia Conceição Diniz
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Prof. Dr. Guilherme Chaud Tizziotti

Análise Real

UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
MEC / SEED / UAB
2012

F383a Ferreira, Francinildo Nobre

Análise Real / Francinildo Nobre Ferreira; Adélia Conceição Diniz; Carlos Alberto Raposo da Cunha; Guilherme Chaud Tizziotti . — São João del-Rei, MG : UFSJ, 2012.

218p.

Curso de Especialização em Matemática.

1. Análise Matematica I. Diniz, Adélia Conceição II. Cunha, Carlos Alberto Raposo da III. Tizziotti, Guilherme Chaud IV. Título.

CDU: 517

UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SÃO JOÃO DEL-REI

Edição

Núcleo de Educação a Distância
Comissão Editorial - NEAD-UFSJ

Capa/Diagramação

Eduardo Henrique de Oliveira Gaio

SUMÁRIO

PARA COMEÇO DE CONVERSA...

Prezado(a) aluno(a):

É com alegria que estamos iniciando o estudo da disciplina Análise Real. É bom estar com você nesta oportunidade. Vamos aproveitar, da melhor forma possível, este momento, a fim de que você possa enriquecer seus conhecimentos.

Desde que começou a falar, você aprendeu a contar brinquedos, degraus de escadas, passarinhos etc. Já um pouco mais crescido, aprendeu que os números que você usava para contar: 1, 2, 3, 4 etc eram conhecidos como números naturais e que esse conjunto geralmente é denotado por N. Ou seja,

$$N = \{1,2,3,4,\cdots\}.$$

Embora o número zero, em vários textos, esteja incluído no conjunto dos números naturais, neste texto, admitiremos, sem maiores justificativas, esse conjunto sem o número zero.

Tempos depois, você também aprendeu que, na necessidade da representação de temperaturas abaixo de zero, saldo negativo em bancos, ou outros motivos, surgiu o conjunto dos números inteiros, que, geralmente, é denotado por Z:

$$Z = \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots\}.$$

Posteriormente, conheceu o conjunto dos números racionais, denotado, geralmente, por Q e representado por:

$$Q = \left\{\frac{p}{q}; p,q \in Z, q \neq 0\right\}.$$

Você conheceu, também, o conjunto dos números irracionais, chegando, desse modo, ao conjunto dos números reais, que é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais e que, neste texto, será denotado por R.

No ensino fundamental, você conheceu a raiz quadrada de alguns números, por exemplo: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ etc. Em outras palavras, admitia-se a existência das raízes quadradas de números reais não negativos, sem maiores justificativas. Mas você já pensou na justificativa da existência dessas raízes? Você conhece algum processo para calcular valores aproximados para essas raízes?

Nesta disciplina, além de refletirmos sobre essas perguntas, retomaremos, para tratarmos de modo mais preciso, vários conceitos estudados no cálculo diferencial e integral, que, certamente, você já cursou.

Os conteúdos que abordaremos, nesta disciplina, são distribuídos em oito Unidades. As Unidades 1 e 4 têm apenas **uma** aula; as Unidades 3 e 8, **duas** aulas; as Unidades 2, 6 e 7, **três** aulas; e a Unidade 5, **quatro** aulas. Embora o número de aulas em cada Unidade não seja o mesmo, você terá uma semana (7 dias) para concluir cada Unidade, já incluído, nesse tempo, a entrega das tarefas.

O tempo que você terá para cursar esta disciplina será 60 dias, e você deverá estudar os seguintes tópicos:

- Resultados preliminares relacionados ao conjunto dos números reais.
- Sequência de números reais.
- Séries numéricas ou séries infinitas.
- Noções de topologia na reta.
- Limite e continuidade de funções reais de variável real.
- Derivadas de funções reais de variável real.
- Integrais de funções reais de variável real.
- Sequências e séries de funções reais de variável real.

Para a elaboração deste texto, as principais referências bibliográficas utilizadas foram Ávila (1999), Bartle (1983), Lima (2007) e Figueiredo (1974).

Atenção! Organize-se e procure se dedicar, da melhor forma possível, ao estudo desta disciplina. É muito importante, em cada Unidade, você realizar as tarefas no tempo estipulado para isso. Se você tiver dificuldade para tal, procure trocar ideias com colegas que estão cursando a disciplina, com o tutor presencial, com o tutor a distância ou com o professor da disciplina.

Certamente, ao cursar esta disciplina, você irá enriquecer seus conhecimentos na área de Matemática, de modo que estará mais capacitado para desenvolver suas atividades profissionais com mais autoconfiança, além de uma melhor base para continuar seus estudos em Matemática.

Bom trabalho!

Os autores

RESULTADOS PRELIMINARES RELACIONADOS AO COJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Objetivos

- Usar a definição de valor absoluto de números reais, para demonstrar propriedades relacionadas a esse conceito.
- Identificar as principais propriedades relacionadas ao conceito de valor absoluto.
- Usar prorpriedades do calor absoluto, para demonstrar outras propriedades.
- Explicitar as notações e principais propriedades do valor absoluto.

Introdução

Nesta Unidade, inicialmente, você recordará alguns conceitos, relacionados ao conjunto dos números reais, e, ao final, verá a definição de valor absoluto e suas principais propriedades. Os conhecimentos revisados nesta Unidade serão utilizados nas Unidades posteriores.

Embora esta Unidade não esteja dividida em aulas, você deverá dedicar-se a ela os 7 primeiros dias de estudo desta disciplina, já incluída a entrega das tarefas, a fim de que revise e se familiarize com esses conceitos.

Nesta Unidade, você revisará:

1. o significado de o conjunto dos números reais ser um corpo.
2. A definição de um subconjunto dos números reais ser limitado (superior e inferiormente).
3. As definições de supremo e de ínfimo de um subconjunto dos números reais e suas principais propriedades.

4. O significado de o conjunto dos números reais ser um corpo ordenado e de ser um corpo ordenado completo.

Além da revisão mencionada, você verá, também, a definição de valor absoluto de um número real e suas principais propriedades, que serão apresentadas por meio dos exercícios.

Admitiremos o conjunto dos números reais, denotado por R, e introduziremos algumas definições e propriedades, nesse conjunto, de modo resumido. Para maiores detalhes, inclusive para as demonstrações, consulte Lima (2007). Assumiremos o conjunto dos números reais R, como um **corpo**, ou seja, um conjunto no qual são definidas duas operações, chamadas adição, denotada por +, e multiplicação, denotada por ".", que satisfazem certos axiomas. Geralmente, omitimos o ponto, ao escrevermos a multiplicação. Em outras palavras, consideraremos as operações:

$$\begin{array}{l} +: R \times R \to R \\ (x, y) \to x + y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} ".": R \times R \to R \\ (x, y) \to x.y \end{array}$$

e admitiremos que elas satisfaçam os seguintes axiomas:

1.1) Associatividade: $(x + y) + z = x + (y + z)\ e\ (xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in R$.

1.2) Comutatividade: $x + y = y + x\ e\ xy = yx, \forall x, y \in R$.

1.3) Elementos neutros: existem dois elementos distintos em R, 0 e 1, tais que $x + 0 = x \; e \; x.1 = x, \forall x \in R$.

1.4) Inversos: dado $x \in R$, existe $-x \in R$, tal que $x + (-x) = 0$. E, se $x \neq 0$, existe também $x^{-1} \in R$, tal que $x.x^{-1} = 1$. O número $-x$ é chamado inverso aditivo de x, e x^{-1} é chamado inverso multiplicativo de x.

1.5) Distributividade: $x(y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in R$.

Desses axiomas, seguem todas as propriedades familiares com os números reais. Como exemplos, podemos citar:

a) $0 + x = x \; e \; (-x) + x = 0, \forall x \in R$.

b) $1.x = x, \forall x \in R \; e \; x^{-1}.x = 1, \forall x \in R, x \neq 0$.

c) $x.0 = 0, \forall x \in R$.

d) Se $x, y \in R$ e $x.y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

e) $x(-y) = (-x)y = -(xy), (-x)(-y) = xy \; e - (-x) = x, \forall x, y \in R$.

f) Se $x, y \in R$ são tais que $x^2 = y^2$, então, $x = \pm y$.

As demonstrações dessas propriedades seguem diretamente dos axiomas de 1.1 a 1.5, que podem ser encontradas em Lima (2007).

Você pode verificar, sem dificuldade, que o conjunto Q dos números racionais, com as operações usuais de soma e multiplicação dos números reais, é um corpo. Entretanto, o conjunto Z dos números inteiros, com as operações usuais de soma e multiplicação, não é um corpo, pois o número 2, por exemplo, não possui inverso multiplicativo em Z.

Uma outra propriedade que também admitiremos é que R é um **corpo ordenado**. Isso significa dizer que existe um subconjunto $R^{+} \subset R$, chamado dos números positivos, que satisfaz as seguintes condições:

P1) dados $x, y \in R^{+}$, temos $x + y \in R^{+}$ e $x.y \in R^{+}$;

P2) dado $x \in R$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in R^{+}$, ou $-x \in R^{+}$.

Escrevemos $x < y$ e dizemos que x é menor do que y, quando $y - x \in R^{+}$, ou seja, existe $z \in R^{+}$, tal que $y = x + z$. Neste caso, escrevemos também $y > x$ e dizemos que y é maior do que x. A notação $x \leq y$ significa que x é menor ou igual y.

As seguintes propriedades relacionadas à relação de ordem $x < y$ são satisfeitas:

O1) Transitividade: se $x < y$ e $y < z$, então, $x < z$.

O2) Tricotomia: dados $x, y \in R$, ocorre exatamente uma das alternativas: $x = y, x < y$ ou $x > y$.

O3) Monotonicidade da adição: se $x < y$, então, $x + z < y + z, \forall z \in R$.

O4) Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ e $z > 0$, então, $xz < yz$. E se $x < y$ e $z < 0$, então, $xz > yz$.

As demonstrações dessas propriedades seguem da definição de corpo ordenado e das propriedades de corpo. Para maiores detalhes, consulte Lima (2007).

Dados $a, b \in R, a < b$, adotaremos as seguintes notações clássicas para intervalos: intervalo aberto (a,b), intervalo fechado $[a,b]$, intervalo semiaberto ou semifechado $[a,b), (a,b]$.

Um outro exemplo de corpo ordenado é o corpo Q dos números racionais, com a relação de ordem dos números reais.

Uma outra propriedade relativa ao conjunto dos números reais é que ele é um corpo ordenado completo, que definiremos após introduzirmos alguns conceitos.

Um conjunto $X \subset R$ diz-se **limitado superiormente** (respectivamente, **inferiormente**), quando existe uma constante real b, tal que $x \leq b, \forall x \in X$. Nesse caso, dizemos que b é uma **cota superior** para o conjunto X. Quando existe $a \in R$, tal que $a \leq x, \forall x \in X$, nesse caso, dizemos que X é limitado inferiormente e que a é uma **cota inferior** para X. Quando X é limitado superior e inferiormente, dizemos que X é **limitado**.

Exemplos 1.1

a) O conjunto $X = (-2,4] \cup [6,10)$ é um conjunto limitado. Sendo -2 uma cota inferior e 10 uma cota superior para X.

b) O conjunto N dos números naturais é limitado inferiormente por 0, mas não é limitado superiormente.

c) O conjunto Z dos números inteiros não é limitado nem inferior, nem superiormente.

Seja $X \subset R$ um conjunto não vazio limitado superiormente. O **supremo** do conjunto X, que denotaremos por $\sup X$, é definido como a menor das cotas superiores de X. Em outras palavras, b é o supremo do conjunto X, quando:

i) b é cota superior para X,

ii) se c for uma cota superior para X, então, $b \leq c$.

Observação 1.2

A condição (ii) pode ser formulada do seguinte modo: se $c < b$, então, existe $x \in X$, tal que $c < x$. Ou ainda, como: dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$, tal que $b - \varepsilon < x$.

Exemplos 1.3

a) Se $X \subset R$ é o intervalo aberto $X = (-3,4)$, então, $\sup X = 4$. Observe que nesse exemplo $\sup X \notin X$.

b) Se $X \subset R$ é o intervalo semiaberto $X = (-3,4]$, então, $\sup X = 4$. Nesse caso, $\sup X \in X$.

c) Considere o corpo ordenado dos números racionais Q e o conjunto

$$A = \{x \in Q; 0 < x < 1\}.$$

O conjunto A é limitado superiormente e $\sup A = 1$. Nesse caso, temos que $\sup A \notin A$.

Seja $X \subset R$ um conjunto não vazio, limitado inferiormente. O **ínfimo** do conjunto X, que denotaremos por $\inf X$, é definido como a maior das cotas inferiores de X. Em outras palavras, a é o ínfimo do conjunto X, quando:

i) a for cota inferior para X,

ii) se c for uma cota inferior para X, então, $c \leq a$.

Observação 1.4

A condição (ii) pode ser formulada do seguinte modo: se $c > a$, então, existe $x \in X$, tal que $x < c$. Ou ainda, como: dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$, tal que $x < a + \varepsilon$.

Exemplos 1.5

a) Se $X \subset R$ é o intervalo aberto $X = (-3,4)$, então, $\inf X = -3$. Observe que nesse exemplo $\inf X \notin X$.

b) Se $X \subset R$ é o intervalo semiaberto $X = [-3,4)$, então, $\inf X = -3$. Nesse caso, $\inf X \in X$.

c) Considere o corpo ordenado dos números racionais Q e o conjunto

$$A = \{x \in Q; 0 < x < 1\}.$$

O conjunto A é limitado inferiormente e $\inf A = 0$. Nesse caso, temos que $\inf A \notin A$.

Um outro conceito muito importante relativo ao corpo dos números reais R é que ele é um **corpo ordenado completo**. Isso significa dizer que todo subconjunto $X \subset R$ não vazio, limitado superiormente, possui um supremo. Esse resultado é conhecido como **axioma do supremo** ou **Postulado de Dedekind**. Em diversas demonstrações ao longo do texto, faremos uso desse axioma.

O conjunto dos números reais R pode ser definido como um corpo ordenado em que se verifica o axioma do supremo.

O corpo Q dos números racionais é ordenado; entretanto não é completo. Neste texto, não entraremos em detalhes quanto à justificativa dessa afirmação. Para mais informações, consulte Ávila (1999) e Figueiredo (1974).

Na Unidade 7, usaremos as seguintes propriedades do supremo e do ínfimo, que serão utilizadas para demonstrar diversas propriedades relativas à integral de Riemann:

I) Sejam $A, B \subset R$, tal que $a \leq b, \forall a \in A \; e \; \forall b \in B$, então:

i) $\sup A \leq \inf B$;

ii) $\sup A = \inf B$, se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existem $a \in A, b \in B$, tais que $b - a < \varepsilon$.

II) Sejam $A, B \subset R$, conjuntos limitados e $c \in R$, então:

1) são limitados os conjuntos $A + B = \{x + y; x, y \in R\}$ e $c.A = \{c.x; x \in R\}$;

2) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$;

3) se $c \geq 0$, $\sup(c.A) = c.\sup A$ e $\inf(c.A) = c.\inf A$;

4) se $c < 0$, então, $\sup(c.A) = c.\inf A$ e $\inf(c.A) = c.\sup A$.

Nosso objetivo agora é introduzir a definição de valor absoluto, que será utilizada, em seguida, para demonstrar propriedades relacionadas a esse conceito. Essas propriedades serão usadas nas Unidades posteriores.

O **valor absoluto (ou módulo)** de um número real a, denotado por $|a|$, é definido do seguinte modo:

$$|a| = \begin{cases} a, \; se \; a \geq 0 \\ -a, \; se \; a < 0 \end{cases}. \qquad (1.1)$$

Em outras palavras, $|\, a \,| = \max\{a, -a\}$, isto é, o maior dos números reais a e $-a$.

Dados $a, b \in R$, geometricamente, o valor absoluto $|\, a - b \,|$ é a distância, na reta real, do ponto a até o ponto b.

Exercícios 1.6

Dados $a, b, c, x, \delta \in R$, demonstre que:

a) $|a\,b| = |a||b|$, (1.2)

b) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular) (1.3)

c) $|a-b| \geq |a|-|b|$ (1.4)

d) $||a|-|b|| \leq |a-b|$ (1.5)

e) $|x-a| < \delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$ (1.6)

f) $|a-c| \leq |a-b|+|b-c|$ (1.7)

g) $|a-b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b|+\varepsilon$ (1.8)

Observação 1.7

O significado da desigualdade do exercício 1.6, item (e), é que o intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ é formado pelos pontos cuja distância até o ponto a é menor do que δ.

SEQUÊNCIA DE NÚMEROS REAIS

Objetivos

- Usar a definição de sequência de números reais e efetuar operações com os termos dessa sequência.
- Usar a definição de limite de sequência, para demonstrar que determinadas sequências convergem.
- Usar a definição de subsequência de números reais e reconhecer a relação entre convergência ou divergência de uma sequência, com convergência ou divergência de suas subsequências.
- Calcular limites de sequências usando as propriedades desses limites.
- Operar com os termos de uma sequência, visando usar um método, para calcular aproximações da raiz quadrada de um número real positivo.
- Calcular os limites inferior e superior de sequências e relacionar os resultados desses limites com a convergência da sequência.

Introdução

Certamente, você conhece do Cálculo o conceito de sequência de números reais e alguns resultados a ele relacionados. Nesta Unidade, você vai retomar esses conhecimentos e estudar outros, que provavelmente você ainda não viu. Os resultados vistos nesta Unidade serão utilizados, posteriormente, principalmente na próxima Unidade.

Nesta Unidade, além de Ávila (1999), Bartle (1983), Lima (2007) e Figueiredo (1974), trabalhamos com Guidorizzi (2002) e Swokowski (1994). Esta Unidade está dividida em 3 aulas, que deverão ser estudadas em 7 dias, já incluída a entrega das tarefas, e versará sobre os seguintes conteúdos:

Aula 1: definição de sequência e limite de uma sequência.

Aula 2: subsequência, sequência limitada e operações com limites.

Aula 3: sequência monótona, limite superior e limite inferior, critério de Cauchy.

Na aula 1, você estudará a definição de sequência de números reais e exemplos, incluindo as progressões aritméticas e as progressões geométricas abordadas no ensino médio, além da sequência de Fibonacci. Também será visto, nesta aula, o conceito de convergência de sequência.

Na aula 2, você estudará a definição de subsequência e exemplos; o conceito de sequência limitada e sua relação com a convergência; além das principais propriedades de limites de sequências, incluindo, também, algumas desigualdades importantes, usadas para demonstrar que certas sequências convergem ou divergem.

Na aula 3, você estudará o conceito de sequência monótona, incluindo exemplos; a relação entre sequência monótona e convergência dessa sequência; os conceitos de limite inferior e de limite superior de uma sequência, inclusive a relação entre esses limites e a convergência da sequência e, por último, o critério de Cauchy para convergência de sequência.

No decorrer de cada aula, você encontrará alguns exercícios para fixação e avaliação da aprendizagem.

Aula 1 - Sequência e limite de uma sequência

Objetivos

- Usar a definição de sequência de números reais e efetuar operações com os termos dessa sequência;

- Usar a definição de limite de sequência, para demonstrar que determinadas sequências convergem.

Uma sequência, como diz Aurélio em seu dicionário, é uma sucessão. Por exemplo, uma sucessão de fatos ou acontecimentos. Em outras palavras, são acontecimentos que ocorrem em uma determinada ordem. Uma sequência de números reais é um conjunto ordenado de números reais, isto é, você tem o primeiro elemento, o segundo elemento, o terceiro elemento etc.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de sequências de números reais.

Exemplo 2.1 Copas do Mundo

A copa do mundo de futebol foi criada pelo francês Jules Rimet, em 1928, e a primeira edição foi realizada no Uruguai em 1930. Admitindo que essa competição ocorre de quatro em quatro anos, temos a seguinte sequência de anos em que ocorreram e ocorrerão copas do mundo:

1930, 1934, ..., 1994, 1998, 2002, 2006, ...

Exemplo 2.2 Anos bissextos

Como as copas do mundo, os anos bissextos, por exemplo, a partir de 2004, também formam a seguinte sequência:

2004, 2008, 2012, ...

Usando o formalismo matemático, dizemos que uma **sequência ou sucessão** de números reais é uma função $f : N \to R$, que associa a cada número natural n, a partir de 1, um número real $f(n)$.

O valor da sequência f, no número natural n, é denominado $n-\acute{e}simo$ termo da sequência, ou termo geral da sequência f e, geralmente, é denotado por a_n, b_n, x_n, y_n *etc.* Neste texto, adotaremos, também, essas notações. Referir-nos-emos ao **termo geral** a_n, como a sequência f, tal que $f(n) = a_n$.

Observação 2.3

Uma sequência pode ser representada pelo seu termo geral ou explicitando seus elementos. No exemplo 2.1, a sequência pode ser representada, em termos do termo geral, por

$$a_n = 1930 + 4(n-1), \text{ para } n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Analogamente, no exemplo 2.2, a sequência pode ser representada, usando o termo geral, por:

$$a_n = 2004 + 4(n-1), \text{ para } n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Outras notações, também bastante utilizadas para representar uma sequência cujo termo geral é a_n, são: $(a_1, a_2, a_3 \cdots)$ e (a_n).

Outros exemplos de sequências.

Exemplo 2.4

As sequências dos exemplos 2.1 e 2.2 são casos particulares de uma sequência popularmente conhecida com o nome de **Progressão Aritmética**, que você já estudou no ensino médio e que é, geralmente, denotada por P.A.

Uma P.A. é uma sequência de números reais em que a diferença entre um termo qualquer, a partir do 2º, e o termo antecedente é sempre a mesma constante. Essa constante é chamada razão da P.A. e, geralmente, é denotada por r. Desse modo, o termo geral a_n, de uma P. A. de razão r, é dado por $a_n = a_1 + (n-1)\,r$.

Exemplo 2.5

Uma sequência muito conhecida que você também estudou no ensino médio foi a **Progressão Geométrica**, que geralmente é denotada por P.G.

Uma P.G. é uma sequência de números reais, nãonulos, em que o quociente entre um termo qualquer, a partir do 2º, e o termo antecedente é sempre a mesma constante. Essa constante é chamada razão da P.G. e, geralmente, é denotada por q. Com essas notações, o termo geral a_n, de uma P.G. de razão q, é dado por $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Exemplo 2.6

No século XIII, o matemático Leonardo Pisa, conhecido como **Fibonacci**, propôs a sequência de números reais (a_n): (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...). Essa sequência é definida pela seguinte lei de recorrência: $a_0 = a_1 = 1 \; e \; a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Ela ficou conhecida como **sequência de Fibonacci** e tem diversas aplicações em fenômenos naturais.

Exemplo 2.7

A sequência (S_n) das somas parciais (S_n é a soma dos n primeiros termos) da P.A. (a_n), de razão r, é dada por:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

De fato, como $a_n = a_1 + (n-1)\,r$, a sequência (S_n) das somas parciais de (a_n) é definida da seguinte forma:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Somando as equações

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{e}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1,$$

obteremos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1).$$

No lado direito dessa equação, temos n parcelas todas iguais a $a_1 + a_n$, então:

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

Logo,

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Exercício 2.8

Demonstre que a sequência (S_n) das somas parciais (S_n é a soma dos n primeiros termos) da P.G. (a_n), de razão $q \neq 1$, é dada por

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Exemplos 2.9

Mais exemplos de sequência de números reais:

a) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

b) $\left(\dfrac{1}{n}\right)$

c) (a_n), em que o termo geral é dado por:

$$a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

d) (a_n), em que $a_n = \begin{cases} 1, \; se\ n\ é\ par \\ -1, \; se\ n\ é\ ímpar \end{cases}$

Observação 2.10

Você não pode confundir a sequência (a_n) com o conjunto formado pelos termos da sequência $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. Por exemplo, a sequência $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots)$, tal que $a_n = -1$, para n ímpar, e $a_n = 1$, para n par, é diferente do conjunto $\{-1, 1\}$.

A seguir, introduziremos a ideia de limite de uma sequência.

Considerando a sequência (a_n), cujo termo geral é dado por $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, e calculando os termos dessa sequência para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ *etc.*, teremos os seguintes valores para a_n:

$$a_1 = 2, a_2 = 1.5, a_3 = 1.33\cdots, a_4 = 1.25, a_5 = 1.2, a_6 = 1.166\cdots \; etc.$$

Se continuarmos considerando cada vez mais valores para n, veremos que, quanto maior for o valor de n, mais próximo de 1 estarão os valores de a_n. Nesse caso, dizemos que a sequência $a_n = \frac{n+1}{n}$ "converge" para 1.

A representação gráfica da sequência anterior, para alguns valores de n, encontra-se, a seguir.

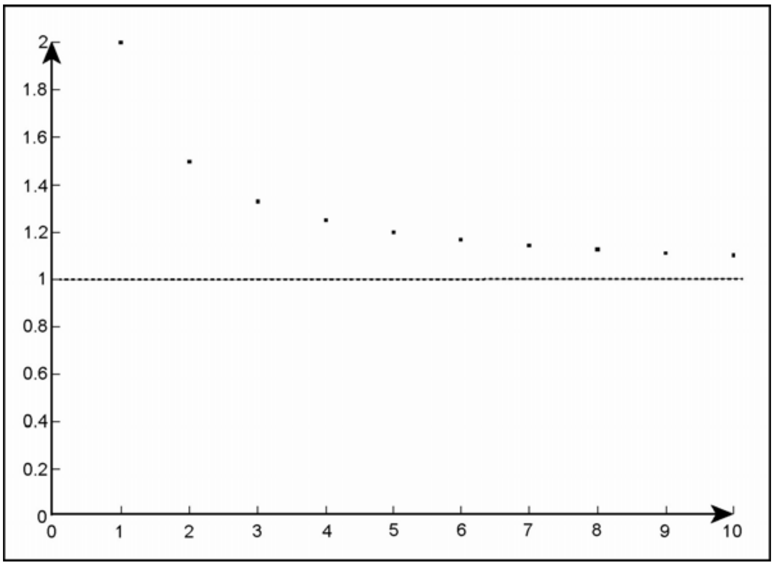

Figura 1: os valores de $f(n) = \frac{n+1}{n}$

É claro que não podemos afirmar um resultado em matemática baseado apenas em uma intuição. É necessário demonstrar a afirmação, utilizando o procedimento lógico dedutivo.

A seguir, introduziremos de modo formal a definição de **limite** de uma sequência de números reais.

Dizemos que uma sequência (a_n) **converge** para $a \in R$ e denotaremos por $a_n \to a$, quando, dado $\varepsilon > 0$, existir um número $n_0 \in N$, tal que, para todo $n > n_0$, tivermos $|a_n - a| < \varepsilon$.

Uma outra notação para a convergência da sequência (a_n), para a, é $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, ou simplesmente, $\lim a_n = a$.

Observação 2.11

Dizer que $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ significa dizer que, para valores muito grandes de n, os termos a_n tornam-se e se mantêm tão próximos de a quanto desejarmos. Significa dizer ainda que, dado um intervalo com centro no ponto a e raio $\varepsilon > 0$, (isto é, dado o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$), é possível encontrar um número $n_0 \in N$, tal que, para todo $n > n_0$, os termos a_n da sequência pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

A figura, a seguir, apresenta uma interpretação geométrica do limite da sequência $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Observe que, para o $\varepsilon > 0$, considerado o valor de $n_0 \in N$, deve ser maior ou igual a 3.

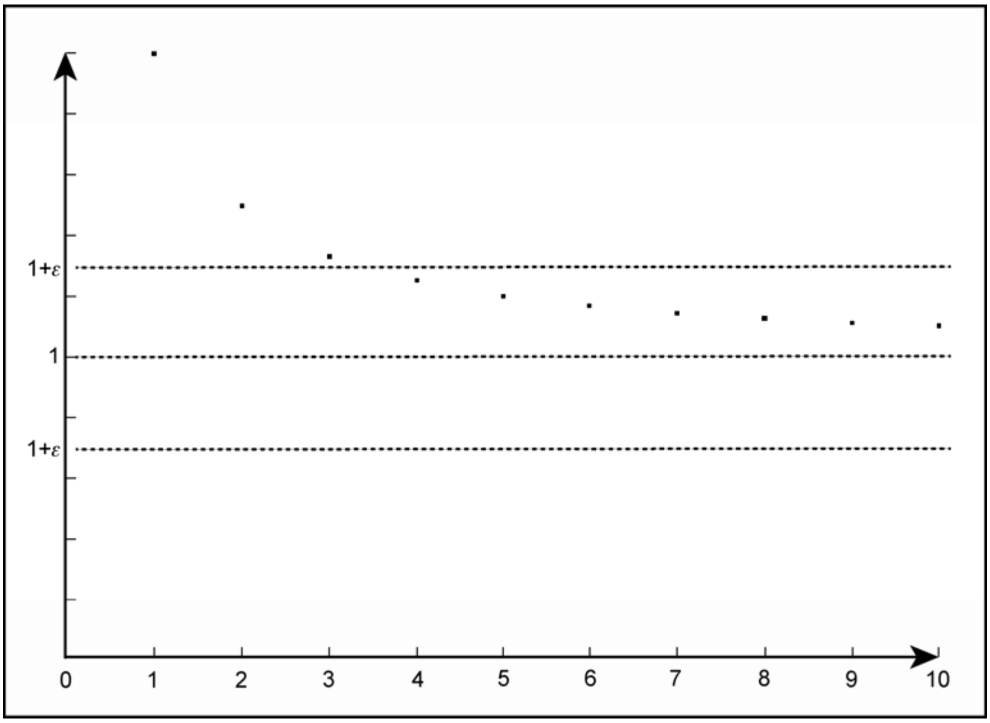

Figura 2: limite de $f(n) = \dfrac{n+1}{n}$

Quando uma sequência (a_n) converge para $a \in R$, dizemos que ela é convergente. Caso contrário, dizemos que ela é divergente.

Dizemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e denotaremos por $a_n \to +\infty$, quando, dado $M > 0$, existir um número $n_0 \in N$, tal que, para todo $n > n_0$, tivermos $a_n > M$. Analogamente, dizemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e denotaremos por $a_n \to -\infty$, quando, dado $M < 0$, existir um número $n_0 \in N$, tal que, para todo $n > n_0$, tivermos $a_n < M$.

Demonstraremos agora (usando a definição) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

Seguindo a definição, inicialmente, estabelecemos um intervalo centrado em a e com raio $\varepsilon > 0$, ou seja, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, e queremos encontrar $n_0 \in N$, tal que, para todo $n > n_0$, os termos a_n da sequência pertencem ao intervalo $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Dizer que $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\in)$ é equivalente a dizer, pela desigualdade (1.6), que $|a_n - 1| < \varepsilon$, ou seja, $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ é ainda equivalente a $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ou seja, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ Então, considere $n_0 \in N$, tal que, $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Logo, para todo $n > n_0$, os termos $a_n = \frac{n+1}{n}$ da sequência pertencem ao intervalo $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Curiosidade

A partir da sequência de Fibonacci, definida no exemplo 2.6: $a_0 = a_1 = 1 \; e \; a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, podemos definir a sequência (x_n), cujo termo geral é dado por $x_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Essa sequência converge para o número $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, que é conhecido como a **razão áurea**, que aparece em diversas áreas do conhecimento, como na Arte, na Arquitetura e na Biologia.

Exercícios 2.12

1) Dada a sequência (a_n), cujo termo geral é $a_n = \frac{n}{n+1}$ e $\varepsilon = 0.05$, encontre $n_0 \in N$, tal que, para todo $n > n_0$, os termos a_n da sequência pertencem ao intervalo $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

2) Demonstre que $\lim\limits_{n+\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3}$.

3) Se a é um numero real, tal que $|a| < 1$, demonstre que $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$.

4) Demonstre que, se (a_n) converge para a, então, $|a_n|$ converge para $|a|$. Sugestão: use a desigualdade (1.5).

Observação 2.13

Uma sequência pode divergir sem que seus termos se tornem arbitrariamente grandes. No exemplo 2.9 (d), temos uma sequência nessas condições. A divergência, nesse caso, é devida ao fato de que seus termos se "acumulam" junto a dois pontos distintos -1 e $+1$.

Aula 2 - Subsequência, sequência limitada e operações com limites

Objetivos

- Usar a definição de subsequência de números reais e perceber a relação entre convergência ou divergência de uma seqüência, a partir da convergência ou divergência de suas subsequências.

- Calcular limites de seqüências, usando as propriedades desses limites.

- Operar com os termos de uma sequência, visando a usar um método, para calcular aproximações da raiz quadrada de um número real positivo.

A seguir, apresentaremos a definição de subsequência de números reais, que será utilizada nesta Unidade e nas Unidades seguintes.

Seja $f : N \to R$ uma função que define a sequência (a_n). E considere $A = \{n_1, n_2, \cdots\}$ um subconjunto infinito dos números naturais N, com $n_1 < n_2 < \cdots$. A restrição da função f ao conjunto A é chamada subsequência de (a_n). Denotaremos essa subsequência por (a_{n_k}), de modo que $f(n_k) = a_{n_k}$.

Exemplo 2.14

Usando a sequência do exemplo 2.9 (d), podemos observar dois exemplos de subsequências:

O primeiro, considerando o conjunto $A = \{1, 3, 5, \cdots\}$. Nesse caso, temos a subsequência (a_{n_k}), cujo termo geral pode ser dado por $a_{n_k} = (-1)^{n_k} = (-1)^{2k-1} = -1$, pois $n_1 = 1,\ n_2 = 3,\ n_3 = 5, \cdots, n_k = 2k - 1, \cdots$.

O segundo, considerando o conjunto $A = \{2, 4, 6, \cdots\}$. Nesse caso, temos a subsequência (a_{n_k}), cujo termo geral pode ser dado por $a_{n_k} = (-1)^{n_k} = (-1)^{2k} = 1$, já que $n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 6, \cdots, n_k = 2k, \cdots$.

Exercício 2.15

Demonstre a seguinte afirmação: Se (a_n) converge para um número *a*, então, toda subsequência (a_{n_k}) de (a_n) converge também para o mesmo valor *a*.

Uma sequência (a_n) diz-se **limitada superiormente (respectivamente, inferiormente),** quando existe uma constante real k, tal que $a_n \le k, \forall n \in N$ (respectivamente, $a_n \ge k, \forall n \in N$). Diz-se que uma sequência é limitada, quando ela é limitada inferior e superiormente. Isso é equivalente a afirmar que existe uma constante c, tal que $|a_n| \le c$, para todo $n \in N$.

Teorema 2.16

Se (a_n) é uma sequência convergente, então, ela é limitada.

Demonstração

Como (a_n) converge, digamos que converge para a. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um número $n_0 \in N$, tal que, para todo $n > n_0$, temos que $|a_n - a| < \varepsilon$. Pela desigualdade (1.4), segue que $|a_n| - |a| \le |a_n - a|$. Portanto, para todo $n > n_0$, $|a_n| < \varepsilon + |a|$.

Considere $k = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0}|, \varepsilon + |a|\}$. Então, $|a_n| \leq k, \forall n \in N$, logo, (a_n) é limitada.

Observação 2.17

Pelo teorema 2.16, toda sequência convergente é limitada. Entretanto, a recíproca dessa afirmação não é verdadeira; por exemplo, dada (a_n), definida por:

$$a_n = \begin{cases} 1, \; se \; n \; é \; par \\ -1, \; se \; n \; é \; ímpar \end{cases}$$

Essa sequência é limitada, pois $|a_n| \leq 1$; no entanto, como vimos na observação 2.13, essa sequência diverge.

Teorema 2.18

Se (a_n) converge para zero, e (b_n) é limitada, então, $(a_n b_n)$ converge para 0 (zero).

Demonstração

Como (b_n) é limitada, então, existe $k > 0$, tal que $|b_n| < k, \forall n \in N$. Da convergência de (a_n) para zero, segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe um número $n_0 \in N$, tal que, para todo $n > n_0$, temos $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{k}$. Portanto,

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n| k < \varepsilon, \forall n \in N, n > n_0.$$

Exercício 2.19

Calcule $\lim\limits_{n+\infty} \frac{1}{n} \cos n$.

A seguir, veremos como se comportam os limites de sequências com relação às operações de soma, produto, divisão e outras propriedades. Essas propriedades são utilizadas para calcular limites de sequências.

Teorema 2.20 (Principais propriedades de limite de sequências)

1) Se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b$, então:

A) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;

B) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n . b_n) = a.b$;

C) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, se $b \neq 0$.

2) Se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b$ e $a_n \leq b_n$, para todo $n \geq n_1$, para algum $n_1 \in N$, então, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

3) Se $a_n \leq b_n$, para todo $n \geq n_1$, e $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, então, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$.

Demonstração

Exercício

Observação 2.21

Seja $n_1 \in N$. No teorema 2.20 (2), mesmo quando $a_n < b_n$, para todo $n \geq n_1$, não podemos garantir que $\lim_{n\to+\infty} a_n < \lim_{n\to+\infty} b_n$. Por exemplo, quando $a_n = 0, \forall n$ e $b_n = \frac{1}{n}$, temos que $a_n < b_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

A seguir, apresentamos uma ferramenta para o cálculo do limite de uma sequência (c_n), quando você souber que existem e são iguais os valores dos limites de duas outras sequências, (a_n) e (b_n), tais que, para todo $n \geq n_1$, tivermos $a_n \leq c_n \leq b_n$.

Teorema 2.22 (Teorema do confronto)

Se existir um número natural n_1, tal que, para todo $n \geq n_1, a_n \leq c_n \leq b_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = L$, então, existe $\lim_{n\to+\infty} c_n$ e $\lim_{n\to+\infty} c_n = L$.

Demonstração

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = L$, então, dado $\varepsilon > 0$, existem números $n_2, n_3 \in N$, tais que, para todo $n > n_2$, temos que $|a_n - L| < \varepsilon$ e, para todo $n > n_3$, temos que $|b_n - L| < \varepsilon$. Pela desigualdade (1.6), temos que $|a_n - L| < \varepsilon$ é equivalente a $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, analogamente, $|b_n - L| < \varepsilon$ é equivalente a $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$. Considere $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Então, para todo $n \in N, n > n_0$, temos que

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon .$$

Portanto, $\lim_{n \to +\infty} c_n = L$.

Exercício 2.23

Calcule $\lim_{n \to +\infty} a_n$, sabendo que $a \in R$ e, para todo $n \in N (n \geq 1)$, $|a_n - a| < \frac{1}{n}$.

IMPORTANTES DESIGUALDADES

Nesta seção, apresentaremos duas desigualdades que serão usadas para calcular limites de algumas sequências.

A) Se r é um número real, tal que $r \geq -1$, então:

$$1 + nr \leq (1+r)^n, \forall n \in N. \qquad (2.1)$$

Essa desigualdade é conhecida como desigualdade de Bernoulli e pode ser demonstrada usando indução matemática.

B) Se r é um número real, tal que $r \geq 0$, então:

$$(1+r)^n \geq 1 + nr + n(n-1)\frac{r^2}{2}, \forall n \in N \qquad (2.2)$$

Essa desigualdade também pode ser demonstrada por indução.

Exemplo 2.24

Dada a sequência (x_n) cujo termo geral é dado por $x_n = a^n$, $a \in R$, usaremos a desigualdade de Bernoulli para calcular $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n$. Observe que, para $a \neq 0$, essa é uma P.G. de razão a.

Consideraremos vários casos, de acordo com os valores da a.

Caso 1. $a > 1$. Considerando $a = 1 + r, r > 0$ e aplicando a desigualdade de Bernoulli, obtemos $a^n = (1+r)^n \geq 1 + nr, \forall n \in N$. Como $1 + nr \to +\infty$, pela propriedade (3) do teorema 2.20, segue que $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

Caso 2. $a < -1$. Nesse caso, os termos dessa sequência alternam de sinal, de acordo com o valor de n, e tendem em valor absoluto para $+\infty$; portanto, a sequência diverge também nesse caso.

Caso 3. $a = -1$. Nesse caso, temos a sequência $x_n = (-1)^n$, que sabemos da observação 2.13, que é divergente.

Caso 4. $a = 1$. Nesse caso, temos a sequência constante $x_n = 1, \forall n \in N$, logo, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 1$; portanto, a sequência converge para 1.

Caso 5. $|a| < 1$. Nesse caso, a sequência $x_n = a^n$ converge para zero, pelo exercício 2.12(3).

Em resumo, temos o seguinte:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, se\ a > 1 \\ diverge, se\ a \leq -1 \\ 1, se\ a = 1 \\ 0, se\ |a| < 1 \end{cases}.$$

Exemplo 2.25

Calcular $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$, em que a é um número real positivo.

De modo análogo ao exemplo anterior, consideraremos dois casos, de acordo com o valor de a.

Caso 1. $a > 1$. Nesse caso, $\sqrt[n]{a} > 1$. Consideremos $\sqrt[n]{a} = 1 + b_n$, em que $b_n > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, segue que $a = (1+b_n)^n \geq 1 + nb_n$. Então, $0 < b_n \leq \dfrac{a-1}{n}$. Passando o limite e usando o teorema 2.22, segue que $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Portanto, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Caso 2. $0 < a < 1$. Nesse caso, $\sqrt[n]{a} < 1$ e escrevemos $\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{1+c_n}$, em que $c_n > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, segue que $a = \dfrac{1}{(1+c_n)^n} \leq \dfrac{1}{1+nc_n}$. Então, $0 < c_n \leq \dfrac{1-a}{na}$. Passando o limite e usando o teorema 2.22, segue que $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$ e, portanto, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Exercícios 2.26

1) Use a desigualdade (2.2) para calcular $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

2) Use os exercícios 2.8 e 2.12(3) para demonstrar que

$$\lim_{n\to+\infty}(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)=\frac{1}{1-x}, \text{ se } |x|<1.$$

Aula 3 - Sequência monótona, limite superior e limite inferior, critério de Cauchy

Objetivos

- Encontrar uma aproximação para o número irracional "e", que é a base dos logaritmos naturais.

- Calcular o limite inferior e o limite superior de sequências e relacionar os resultados desses limites com a convergência da sequência.

Uma sequência (a_n) é chamada **não decrescente,** se $a_n \le a_{n+1}, \forall n \in N$ (isto é, $a_1 \le a_2 \le \cdots$). E é chamada **não crescente,** se $a_{n+1} \ge a_n, \forall n \in N$ (isto é, $a_1 \ge a_2 \ge \cdots$). Quando as desigualdades são estritas, dizemos que a sequência é **crescente** e

decrescente, respectivamente. Se uma sequência é crescente, não crescente, decrescente ou não decrescente, ela é chamada **monótona**.

Exemplo 2.27

1) Dada uma progressão aritmética ou geométrica de razão positiva (a_n), a sequência das somas parciais (S_n) dessas sequências é uma sequência crescente.

2) Seja (x_n) cujo termo geral é dado por $x_n = a^n$. Se $a > 1$, a sequência (x_n) é crescente.

3) Seja (a_n) a sequência cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{n}$; então, (a_n) é decrescente.

4) Seja (x_n) cujo termo geral é dado por $x_n = a^n$. Se $0 < a < 1$, a sequência (x_n) é decrescente.

O resultado a seguir estabelece condições suficientes para que uma sequência seja convergente.

Teorema 2.28

Se (a_n) é uma sequência monótona limitada, então ela é convergente.

Demonstração

Suponhamos que (a_n) seja uma sequência não decrescente. Seja $X = \{a_1, a_2, a_{3,\dots}\}$, o subconjunto dos números reais formado pelos termos dessa sequência. Como (a_n) é limitada, então, X é um conjunto limitado e, assim, limitado superiormente. Pelo axioma do supremo, visto na Unidade 1, existe $S = \sup X$; então, pela observação 1.2, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$, tal que $a_{n_0} \in (S - \varepsilon, S)$. Como (a_n) é não decrescente, então, $a_{n_0} \le a_n, \forall n \ge n_0$ e, por outro lado, $a_n \le S, \forall n,$ em particular, $\forall n \ge n_0$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$, tal que $\forall n \ge n_0, a_n \in (S - \varepsilon, S + \varepsilon)$. Logo, (a_n) converge para S.

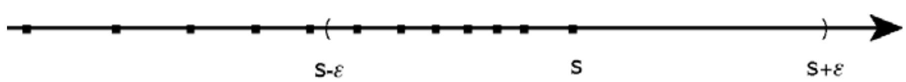

Figura 3: limite S como o supremo de $X = \{a_1, a_2, a_{3,\dots}\}$

Para os outros casos de monotonicidade da sequência (a_n), a demonstração é análoga.

Observação 2.29

O teorema 2.28 não determina explicitamente o valor do limite, de modo que ele pode ser usado, quando não necessitamos do resultado do limite, como no exemplo, a seguir.

Exemplo 2.30

Considere a sequência cujo termo geral é dado por

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}. \qquad (2.3)$$

O que podemos dizer sobre a convergência ou divergência dessa sequência? (a_n) é evidentemente crescente e, além disso,

$$2 \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

Em que a última desigualdade segue de

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2,$$

que é uma consequência do exercício 2.26(2).

Portanto, (a_n) é uma sequência monótona limitada. Pelo teorema 2.28, ela é convergente.

Curiosidade

O limite da sequência (a_n), do exemplo 2.30, é o número irracional "e" (demonstraremos esse fato na Unidade 8). O número "e" é a base dos logaritmos naturais, que você conheceu quando estudou logaritmo no ensino médio. Essa é uma das constantes mais importantes da Análise Matemática.

Exercício 2.31

1) Já vimos que $2 < e \leq 3$, sendo essa última desigualdade uma consequência do teorema 2.20(2). Utilize a equação (2.3) e sua calculadora para calcular o valor de e com 4 casas decimais exatas.

2) Uma aplicação interessante do teorema 2.28 é um método que os babilônios usavam para o cálculo da raiz quadrada de um número real positivo a, com data de 18 séculos antes de Cristo, a saber:

Sejam a_1 e a números reais positivos dados, com $a_1 > \sqrt{a}$. Considere a sequência (a_n) definida por

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}).$$

Observe que a_{n+1} é a média aritmética entre a_n e $\frac{a}{a_n}$

Demonstre que

I) $a_n^2 \geq a$;

II) $\frac{a}{a_n} < \sqrt{a} < a_n$, $\forall n \in N$;

III) $a_{n+1} \leq a_n$.

IV) Justifique a existência do $\lim_{n \to +\infty} a_n$ e calcule o valor desse limite.

3) Use o método dos babilônios para calcular um valor aproximado para $\sqrt{2}$, com 5 casas decimais, considerando $a_1 = 1$.

4) Se $a_n > 0, \forall n \in N$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d < 1$, então, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Sugestão: use o teorema 2.28.

5) Admitindo que a é uma constante real, tal que $a > 1$, $k \in N$ e, além disso, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; calcule os seguintes limites: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Sugestão: use o exercício 4.

A seguir, apresentaremos um resultado que relaciona os conceitos de sequência limitada e subsequência convergente.

Teorema 2.32 (Bolzano Weierstrass)

Se (a_n) é uma sequência limitada de números reais, então, ela possui uma subsequência convergente.

Neste texto, não demonstraremos esse teorema. O leitor interessado na demonstração deve consultar Ávila (1999) ou Lima (2007).

A seguir, apresentaremos a definição de limite superior e de limite inferior de uma sequência (a_n).

Dada uma sequência (a_n), definimos o **limite superior** de (a_n), que denotaremos por $\limsup a_n$, como um número real S, que satisfaz a seguinte propriedade: dado $\varepsilon > 0$, existe apenas um número finito de índices n, tais que $a_n > S + \varepsilon$, e existe um número infinito de índices n, tais que $a_n > S - \varepsilon$.

Exemplos 2.33

1) Dada a sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{n}$, então, $\limsup a_n = 0$.

2) Dada a sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = (-1)^n$, então, $\limsup a_n = 1$.

Observações 2.34

1) Se uma sequência (a_n) converge, então, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \limsup a_n$.

2) Se uma sequência (a_n) tem $\limsup a_n = S$, então, existe uma subsequência (a_{n_k}) dessa sequência que converge para S.

Dada uma sequência (a_n), definimos o **limite inferior** de (a_n), que denotaremos por $\liminf a_n = s$, como um número real s, que satisfaz a seguinte propriedade: dado $\varepsilon > 0$, existe apenas um número finito de índices n, tais que $a_n < s - \varepsilon$, e existe um número infinito de índices n, tais que $a_n < s + \varepsilon$.

Exemplos 2.35

1) Dada a sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{n}$, então, $\liminf a_n = 0$.

2) Dada a sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = (-1)^n$, então, $\liminf a_n = -1$.

Observações 2.36

1) Se uma sequência (a_n) converge, então, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \liminf a_n$

2) Se uma sequência (a_n) tem $\liminf a_n = s$, então, existe uma subsequência (a_{n_k}) dessa sequência que converge para s.

Teorema 2.37

Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência limitada (a_n) convirja para um número real a é que $\liminf a_n = \limsup a_n = a$.

Não demonstraremos esse teorema neste texto. Uma demonstração pode ser encontrada em Ávila (1999).

Exercícios 2.38

Para cada sequência, a seguir, calcule $\liminf a_n$, $\limsup a_n$ e verifique se cada sequência converge ou diverge.

1) $a_n = (-1)^n(2 + \frac{1}{n})$.

2) $a_n = (-1)^n(2 - \frac{1}{n})$.

3) (a_n) em que $a_{2n} = \frac{n^2}{n+1}$ e $a_{2n+1} = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$.

4) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

O resultado, a seguir, trata de um critério de convergência de uma sequência. Por meio dele, podemos saber se uma dada sequência converge, sem conhecermos necessariamente o limite. Esse resultado será usado largamente, para demonstrar resultados envolvendo séries de números reais.

Teorema 2.39 (Critério de Cauchy).

Uma sequência (a_n) de números reais é convergente em R, se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in N$, tal que $\forall m,n \in N$, com $m,n > n_0$, tivermos $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Demonstração

$\Rightarrow$) Admitindo que (a_n) converge para um determinado número real a, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$, tal que $\forall m, n \in N$, com $m, n > n_0$, temos que $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da desigualdade (1.7), segue que

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$) Admitindo agora que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$, tal que $\forall m, n \in N$, com $m, n > n_0$, temos $|a_n - a_m| < \varepsilon$; segue que $\forall n \in N, n > n_0$, temos que $|a_n - a_{n_0+1}| < \varepsilon$ (considere $m = n_0 + 1$ na desigualdade $|a_n - a_m| < \varepsilon$). Então, da desigualdade (1.4), segue que $|a_n| < \varepsilon + |a_{n_0+1}|, \forall n > n_0$. Desse modo, fazendo

$$k = \max\left\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0}|, \varepsilon + |a_{n_0+1}|\right\},$$

segue que $|a_n| \leq k, \forall n \in N$; logo, (a_n) é limitada, e pelo teorema 2.32, de Bolzano Weierstrass, (a_n) possui uma subsequência (a_{n_k}) que converge para um determinado número real a. Provaremos, agora, que (a_n) converge para a. Como (a_{n_k}) converge para a, fixemos k suficientemente grande, tal que $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n_k > n_0$. Usando mais uma vez a desigualdade (1.4), segue que

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, (a_n) converge para a.

Uma sequência (a_n) de números reais é chamada **sequência de Cauchy,** quando, dado $\varepsilon > 0$, existe um número $n_0 \in N$ (que depende de ε), tal que, para todo $m, n > n_0$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Observação 2.40

A partir da definição anterior, o teorema 2.39 pode ser enunciado da seguinte forma: uma sequência de números reais é convergente, se, e somente se, essa sequência é de Cauchy.

SÉRIES NUMÉRICAS OU SÉRIES INFINITAS

Objetivos

- Determinar a sequência das somas parciais de uma determinada série e verificar se a mesma converge, calculando o limite de sua sequência das somas parciais.
- Reconhecer se uma série geométrica converge ou diverge e calcular a soma dessa série, quando ela for convergente.
- Usar o teste da comparação para descobrir se uma série converge ou diverge.
- Reconhecer se uma série é absolutamente convergente ou condicionalmente convergente.
- Usar convenientemente o teste da série alternada para descobrir se uma série alternada é convergente.
- Usar conhecimentos sobre séries que satisfazem o teste da série alternada, para encontrar uma estimativa para a soma dessa série.
- Usar o teste da raiz, para verificar se uma determinada série converge.
- Usar o teste da razão, para verificar se uma determinada série converge.

Introdução

Nesta Unidade, como na Unidade anterior, você também estudará conteúdos que conheceu no curso de cálculo, que é o conceito de série de números reais, além de resultados a ela relacionados. Nesta oportunidade, retomaremos esses conceitos de modo mais detalhado. Para isso, usaremos largamente os conhecimentos vistos na Unidade 2. Os resultados vistos, nesta Unidade, serão utilizados posteriormente, principalmente na Unidade 8.

Nesta Unidade, como na Unidade 2, além de Ávila (1999), Bartle (1983), Lima (2007) e Figueiredo (1974), trabalhamos com Guidorizzi (2002) e Swokowski (1994). Esta Unidade está dividida em 2 aulas, que deverão ser estudadas em 7 dias, já incluída a entrega das tarefas, e versará sobre os seguintes conteúdos:

Aula 1: Série, somas parciais, teste de comparação.

Aula 2: Séries absoluta e condicionalmente convergente, testes da série alternada, da raiz e da razão.

Na aula 1, você estudará as definições de série numérica, de soma parcial de uma série e de série convergente ou divergente; estudará o critério de convergência de

Cauchy para séries e o teste de comparação, para verificar convergência ou divergência de uma determinada série.

Na aula 2, você estudará as definições de série absoluta e condicionalmente convergente; os testes da série alternada, da raiz e da razão, para analisar se uma determinada série é convergente ou não.

No decorrer de cada aula, você encontrará alguns exercícios para fixação e avaliação da aprendizagem.

Aula 1 - Série, somas parciais, teste de comparação

Objetivos

- Determinar a sequência das somas parciais de uma determinada série e verificar se a mesma converge, calculando o limite de sua sequência das somas parciais.
- Reconhecer se uma série geométrica converge ou diverge e calcular a soma dessa série, quando ela for convergente.

- Usar o teste da comparação para descobrir se uma determinada série converge ou diverge.

Muitas vezes, em Matemática ou em outras ciências, necessitamos expressar funções $f(x)$, como "polinômios infinitos". Um exemplo dessa natureza foi o que vimos na Unidade 2, exercício 2.26(2), para $f(x) = \frac{1}{1-x}$, a saber:

Se $|x| < 1$, então,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots. \tag{3.1}$$

Nesse exercício, para cada valor constante de x, analisamos o "polinômio" como uma soma infinita de constantes. A essa soma infinita de constantes, chamamos **série numérica ou série infinita**.

Esta Unidade será dedicada ao estudo de série infinita e suas propriedades e será muito importante para abordarmos, na Unidade 8, a relação das funções com sua representação, em termos de uma série, quando isso for possível.

Como vimos na igualdade anterior, as séries de potências surgem, quando procuramos somar todos os termos de uma sequência (a_n), ou seja, quando consideramos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots.$$

Como é impossível somar infinitos números, um após outro, consideramos a sequência (s_n) das somas parciais, definida da seguinte forma:

$$s_1 = a_1, \; s_2 = a_1 + a_2, \; s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \; \cdots, \; s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \; etc.$$

Os números s_n são chamados **reduzidas ou somas parciais** da série $\sum a_n$. A parcela a_n é o $n-ésimo$ **termo ou termo geral** da série.

Se existir o limite $S = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n$, diremos que a série $\sum a_n$ é **convergente** e $S = \sum a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots$ é chamada **soma da série**. Se $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ não existir, dizemos que $\sum a_n$ é uma série **divergente**.

Exemplo 3.1

1. Série geométrica: vimos, no exercício 2.25(2), que, se $|a| < 1$, então, a série geométrica $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + \cdots$ é convergente e tem como soma $\dfrac{1}{1-a}$.

2. Vimos, também, no exemplo 2.20, que a série $1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots \dfrac{1}{n!} + \cdots$ também converge e tem como soma o número "e", base dos logaritmos naturais. Ou seja,

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} + \cdots . \qquad (3.2)$$

Agora, se não levarmos em consideração a dificuldade de fazer as contas, você pode calcular o valor de "e", com quantas casas decimais desejar. Euler (1707-1783) calculou esse valor com 23 casas decimais.

3 Dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, encontre a sequência de suas somas parciais e verifique se ela é convergente ou divergente.

Como $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, podemos escrever a sequência (s_n) das somas parciais da série dada do seguinte modo:

$$s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}).$$

Observando o termo do lado direito da última igualdade, temos que o segundo termo da primeira parcela se cancela com o primeiro termo da segunda parcela, e, assim, sucessivamente, de modo que obteremos $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$ (pois $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$), temos que a série dada converge para 1.

4 A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ diverge, pois a sequência (s_n) das somas parciais é dada por $s_n = -1$, quando n é ímpar, e 0, quando n é par, então, (s_n) diverge. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ diverge.

O resultado, a seguir, fornece uma condição necessária para que uma série $\sum a_n$ seja convergente.

Teorema 3.2

Se uma série $\sum a_n$ converge, então, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Demonstração

Como a série $\sum a_n$ é convergente, considerando

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

existe $S = \lim_{n\to+\infty} s_n$. Da mesma forma, $S = \lim_{n\to+\infty} s_{n-1}$. Como $a_n = s_n - s_{n-1}$, segue que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Observação 3.3

Uma consequência do teorema 3.2 é que, dada uma série $\sum a_n$, se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, então, a série diverge.

Observação 3.4

A recíproca do teorema 3.2 é falsa, ou seja, se uma série $\sum a_n$ é tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, isso não implica que a série converge. Veja o exemplo 3.6, após o próximo teorema.

O resultado, a seguir, estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma série seja convergente.

Teorema 3.5 (Critério de convergência de Cauchy para séries).

Uma série $\sum a_n$ converge, se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existir um número $n_0 \in N$, tal que, para todo $m \geq n > n_0$, tivermos $\left| \sum_{j=n}^{j=m} a_j \right| < \varepsilon$.

Demonstração

A demonstração desse teorema segue do critério de Cauchy para sequências, teorema 2.39, visto na Unidade 2, substituindo, naquele teorema, a_m por s_m e a_n por s_n, sendo:

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m \text{ e } s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

com m maior ou igual a n.

O exemplo, a seguir, é uma aplicação do teorema 3.5.

Exemplo 3.6

Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Essa série é conhecida como **série harmônica**. Demonstraremos, agora, que ela é uma serie divergente.

De fato,

$$\sum_{n=n}^{j=2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Aplicando o teorema 3.4, segue o resultado, pois encontramos $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, tal que $\forall n_0 \in N$, existem $m = 2n \geq n > n_0$, tal que $\left| \sum_{j=n}^{j=2n} \frac{1}{j} \right| \geq \varepsilon$.

A seguir, apresentaremos um resultado que diz respeito a operações com séries convergentes.

Teorema 3.7

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes, e k é um número real qualquer. Então:

A) a série $\sum ka_n$ converge e $\sum ka_n = k \sum a_n$;

B) a série $\sum (a_n + b_n)$ converge e $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

A demonstração desse teorema segue das propriedades de limite de sequências, teorema 2.20 (1).

Teorema 3.8 (teste de comparação).

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não negativos ($a_n \geq 0 \, e \, b_n \geq 0$). Se existe $c > 0$, tal que $a_n \leq cb_n \ \forall n \in N$, podemos afirmar que

A) se $\sum b_n$ converge, então, $\sum a_n$ converge.

B) se $\sum a_n$ diverge, então, $\sum b_n$ diverge.

Demonstração

Consideremos (s_n) e (t_n) as sequências das somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente. Como $a_n \leq cb_n \ \forall n \in N$, as sequências (s_n) e (t_n) são não decrescente, tais que $s_n \leq ct_n$, $\forall n \in N$. Como $c > 0$, (t_n) limitada implica (s_n) limitada, e (s_n) ilimitada implica (t_n) ilimitada, portanto, segue a demonstração do teorema.

Exemplos 3.9

Se $r > 1$, então, a série $\sum \frac{1}{n^r}$ converge.

De fato, seja $c = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{2^r} \right)^n$. E consideremos (s_m) a sequência das somas parciais da série $\sum \frac{1}{n^r}$ e n, tal que $m \le 2^n - 1$.

$$s_m \le 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} \right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^r} \right).$$

Então,

$$s_m < 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\frac{2}{2^r} \right)^i < c.$$

Pelo teorema 2.28, (s_m) converge. Portanto, $\sum \frac{1}{n^r}$ converge.

Exercícios 3.10

1) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$ converge ou diverge? Justifique sua resposta.

2) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ converge ou diverge? Justifique sua resposta.

3) A série $3{,}7 + 3{,}07 + 3{,}007 + \cdots + 3\frac{7}{10^n} + \cdots$ converge ou diverge? Justifique sua resposta. Se convergir, calcule sua soma.

4) Use o teste da comparação para demonstrar a seguinte afimação: se $r < 1$, a série $\sum \frac{1}{n^r}$ diverge.

5) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 1}$ converge ou diverge? Justifique sua resposta.

6) A série $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{n} - 2}$. converge ou diverge? Justifique sua resposta.

Aula 2: Séries absoluta e condicionalmente convergente, testes da série alternada, da raiz e da razão.

Objetivos

- Reconhecer se uma determinada série é absolutamente convergente ou condicionalmente convergente.
- Usar convenientemente o teste da série alternada para descobrir se uma determinada série alternada é convergente.

- Usar conhecimentos sobre série que satisfazem o teste da série alternada, para encontrar uma estimativa para a soma dessa série.

- Usar o teste da raiz, para verificar se uma determinada série converge.

- Usar o teste da razão, para verificar se uma determinada série converge.

Dizemos que uma série $\sum a_n$ é dita **absolutamente convergente,** quando $\sum |a_n|$ converge, em que $|a_n|$ é o valor absoluto de a_n.

Quando uma série $\sum a_n$ é convergente e $\sum |a_n| = +\infty$, dizemos que $\sum a_n$ é **condicionalmente convergente**.

A seguir, veremos outros testes usados para analisar a convergência de séries.

Teorema 3.11 (Teste de Leibniz ou teste da série alternada)
Se (a_n) é uma sequência monótona decrescente, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, então, a série $\sum (-1)^{n+1} a_n$ converge.

Demonstração

Seja $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$ a soma parcial dos n primeiros termos da série. Então, $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$. Sabemos, também, que

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}), \quad (3.3),$$

ou ainda,

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

como $a_n - a_{n+1} \geq 0, \forall n \in N (n \geq 1)$, temos, da última equação, que $s_{2n} \leq a_1$ e, portanto, (s_{2n}) é limitada. Por outro lado, como $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0, \forall n \in N (n \geq 1)$, de (3.3), segue que (s_{2n}) é uma sequência não decrescente. Como ela é limitada, temos que é convergente (pelo teorema 2.28), digamos que converge para S. Como $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, então, $\lim_{n \to +\infty} a_{2n+1} = 0$. Considerando o limite $n \to +\infty$ na equação $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, segue que $\lim_{n \to +\infty} s_{2n+1} = S$. Portanto, a sequência (s_n) das reduzidas converge para S, concluindo, assim, a demonstração do teorema.

Exemplo 3.12

A série $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge pelo teorema 3.11, com $a_n = \frac{1}{n}$.

Exercícios 3.13

1) A série $\sum (-1)^{n+1} \log(1 + \frac{1}{n})$ é convergente? É absolutamente convergente? Justifique sua resposta.

2) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{n^2+5}$ converge ou diverge? Justifique sua resposta.

Se uma série alternada satisfaz as hipóteses do teorema 3.11, então, a soma dos n primeiros termos da série pode ser usada para aproximar a soma S da série. Muitas vezes, é difícil determinar uma estimativa para o cálculo do erro, quando fazemos essa aproximação. Entretanto, no caso da série alternada, é possível fazer uma estimativa desse erro. Esse é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 3.14

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ uma série alternada que satisfaz as hipóteses do teorema 3.11. Se S é a soma da série, e S_n é a soma parcial dos n primeiros termos, então, $|S-S_n|\le a_{n+1}$. Ou seja, o erro cometido ao aproximarmos S por S_n é, no máximo, igual a a_{n+1}.

Demonstração

Seja

$$R_n = S - s_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots),$$

Então,

$$|R_n| = |S - s_n| = (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - \cdots);$$

ou seja,

$$|R_n| = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots$$

Como $a_n - a_{n+1} \ge 0, \forall n \in N (n \ge 1)$, segue que

$$|R_n| = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \le a_{n+1}.$$

No próximo exercício, você deve aplicar o teorema 3.14, para aproximar a soma de uma série alternada. Para isso, utilize a seguinte nomenclatura: se E é o erro de uma aproximação, então, essa aproximação terá uma precisão de k casas decimais, se

$$|E| \leq 0{,}5 \times 10^{-k}.$$

Exercício 3.15

Demonstre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$ converge e obtenha uma aproximação com 5 casas decimais para sua soma.

O resultado, a seguir, afirma que convergência absoluta de uma série implica convergência dessa série.

Teorema 3.16

Se a série $\sum |a_n|$ é convergente, então, $\sum a_n$ é convergente.

Demonstração

Como $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, somando $|a_n|$ em cada membro dessa desigualdade, temos que $0 \leq a_n + |a_n| \leq |a_n| + |a_n|$; logo, $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$. Como $\sum |a_n|$ converge, pelo teste da comparação, a série $\sum (a_n + |a_n|)$ converge. Como $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ e as séries $\sum (a_n + |a_n|)$ e $\sum |a_n|$ convergem, então, $\sum a_n$ converge.

Observação 3.17

A recíproca do teorema anterior é falsa, pois a série $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ do exemplo 3.12 converge; entretanto, a série $\sum\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum\frac{1}{n}$, que é a série harmônica, diverge, como vimos no exemplo 3.6.

Exemplo 3.18

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos k}{k^2}$ é absolutamente convergente.

De fato, $\left|\frac{\cos k}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ converge. Pelo teste da comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos k}{k^2}\right|$ converge. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos k}{k^2}$ converge absolutamente, e, pelo teorema 3.16, é convergente.

A seguir, veremos mais dois testes para saber se uma dada série é convergente ou não.

Teorema 3.19 (Teste da raiz ou teste de Cauchy)

Seja $n_0 \in N$ e $\sum a_n$ uma série, tal que $a_n \geq 0, \forall n \in N, n \geq n_0$. E suponha que $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$. Então:

(a) se $L < 1$, a série converge;

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então, a série diverge.

Demonstração

(a) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, então, existe uma constante *c*, real positiva, tal que $\sqrt[n]{a_n} < c < 1$, para todo n suficientemente grande. Logo, $a_n < c^n$, para todo n suficientemente grande. Como (c^n) é uma P.G. de razão menor do que 1, ela converge, e, pelo teste da comparação, a série $\sum a_n$ converge.

(b) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$, então, existe uma constante *c*, real positiva, tal que $\sqrt[n]{a_n} > c > 1$, para todo n suficientemente grande. Logo, $a_n > c^n$, para todo n suficientemente grande. Como (c^n) é uma P.G. de razão maior do que 1, ela diverge, e, pelo teste da comparação, a série $\sum a_n$ diverge.

Observações 3.20

1) Se no teorema 3.19, $L = 1$, nada podemos concluir sobre o limite. De fato, as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ têm como $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, no entanto, a primeira diverge, e a segunda converge.

2) Se, no teorema 3.19, existir um número real c, tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq c < 1$ (respectivamente, $\sqrt[n]{a_n} \geq c > 1$), para todo n suficientemente grande, então, a série $\sum a_n$ converge (respectivamente, $\sum a_n$ diverge).

Teorema. 3.21 (Teste da razão ou de D`Alembert)

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos (estritamente), tal que exista $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ e esse limite seja L. Então:

(a) se $L < 1$, a série converge;

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então, a série diverge.

Demonstração

a) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, então, dada uma constante *c*, com $L < c < 1$, existe um número n_0, tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < c$, $\forall n \in N, n \geq n_0$.

Temos, assim:

$$a_{n_0+1} < ca_{n_0},\ a_{n_0+2} < ca_{n_0+1} < c^2 a_{n_0},\ a_{n_0+3} < ca_{n_0+2} < c^3 a_{n_0},\ \cdots,$$

Desse modo, em geral, $a_{n_0+j} < c^j a_{n_0}$, para $j = 1, j = 2, j = 3, \cdots$. Pelo teste da comparação (com uma série geométrica convergente), a série $\sum a_n$ converge.

b) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$, então, dada uma constante *c*, com $1 < c < L$, existe um número n_0, tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > c$, $\forall n \in N, n \geq n_0$.

Temos, assim:

$$a_{n_0+1} > ca_{n_0},\ a_{n_0+2} > ca_{n_0+1} > c^2 a_{n_0},\ a_{n_0+3} > ca_{n_0+2} > c^3 a_{n_0},\ \cdots.$$

Desse modo, em geral, $a_{n_0+j} > c^j a_{n_0}$, para $j = 1, j = 2, j = 3, \cdots$. Pelo teste da comparação (com uma série geométrica divergente), a série $\sum a_n$ diverge.

Observações 3.22

1) Se no teorema anterior, $L = 1$, nada podemos concluir sobre o limite. De fato, pelo teste da razão, as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ têm como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$; no entanto, a primeira diverge, e a segunda converge.

2) De acordo com a demonstração do teorema, não é necessário que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$. É suficiente que exista um número c, tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c < 1$, para todo n suficientemente grande (respectivamente, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq c > 1$, para todo n suficientemente grande), para que a série $\sum a_n$ seja convergente (respectivamente, $\sum a_n$ seja divergente).

Exercícios 3.23

1) Para que valores de p, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ é convergente? E absolutamente convergente?

2) Demonstre que, sendo k inteiro positivo e $a > 1$, as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ convergem.

3) Demonstre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+1)!}{n^5}$ diverge.

A seguir, apresentaremos dois resultados que relacionam a convergência de uma série com a convergência de uma nova série construída, a partir de uma reordenação das parcelas da série original. Não demonstraremos esses resultados, neste texto. Para maiores detalhes, vide Ávila (1999, p. 64, 67).

Teorema 3.24

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série absolutamente convergente e $b_1, b_2, b_3, \cdots$ é qualquer rearranjo da sequência (a_n), então, $\sum b_n$ converge absolutamente e $\sum b_n = \sum a_n$.

Teorema 3.25

Se uma série $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, seus termos podem ser reordenados de maneira que a nova série convirja para qualquer número real S pré- fixado.

unidade 4

NOÇÕES DE TOPOLOGIA DA RETA

Objetivos

- Reconhecer se um determinado subconjunto dos números reais é aberto ou fechado.
- Relacionar os conhecimentos sobre ponto de acumulação e sequência convergente.
- Relacionar os conceitos de ponto aderente e de sequência convergente.
- Demonstrar propriedades referentes a conjuntos fechados.
- Relacionar os conhecimentos sobre conjunto compacto, com os conhecimentos de sequência e subsequência.
- Demonstrar propriedades referentes a operações com conjuntos compactos.

Introdução

Nesta Unidade, você irá estudar noções topológicas na reta, que serão necessárias para o estudo de funções na próxima Unidade. Os conhecimentos que você irá estudar, nesta Unidade, em geral, não são vistos na graduação, a não ser que você tenha cursado a disciplina de análise. Se você estiver interessado em outros detalhes sobre os conceitos trabalhados nesta Unidade, deve procurar, por exemplo, Lima (1977).

O conteúdo a ser trabalhado nesta Unidade é o correspondente a uma aula; entretanto, você deverá se dedicar a ela 7 dias de estudos, já incluída a entrega das tarefas.

Os conhecimentos que você irá estudar nesta Unidade estão relacionados à Topologia, que é uma área da Matemática na qual se estudam, de modo geral, as noções relacionadas aos conceitos de limite e de continuidade.

Para tratarmos os conteúdos que serão trabalhados nesta Unidade, adotaremos, sem outros detalhes, a identificação do "conjunto de pontos que formam uma reta" (reta real) com o conjunto dos números reais, e usaremos a palavra "ponto", significando "número real", de modo que, quando dizemos "ponto c", significa "número real c".

Dado um subconjunto X dos números reais, nesta Unidade, você estudará os conceitos de ponto interior e interior de X; conjunto aberto; ponto de acumulação de X; ponto isolado em X; conjunto discreto; ponto de aderência e fecho de X; conjunto fechado e conjunto compacto, além de várias propriedades relacionadas a esses conceitos.

Um ponto a chama-se **ponto interior** de $X \subset R$, quando existe um número $\varepsilon > 0$, tal que o intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ está contido em X. O **interior** de um conjunto X é o conjunto de todos os seus pontos interiores, denotado por $\operatorname{int} X$.

Um conjunto X é **aberto,** quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, quando $X = \operatorname{int} X$. Chama-se **vizinhança** de um ponto a qualquer conjunto Y, tal que $a \in \operatorname{int} Y$, em particular, qualquer intervalo aberto contendo a é uma vizinhança de a, por exemplo, dado $\varepsilon > 0$, o intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ é uma vizinhança do ponto a.

Exemplos 4.1

1) Todo intervalo aberto (a,b) é um conjunto aberto, pois, dado $c \in (a,b)$, c é ponto interior de (a,b).

2) Dado um intervalo fechado $[a,b]$, os pontos a e b não são pontos interiores de $[a,b]$. Esses são os únicos pontos de $[a,b]$ que não são interiores; logo, $\operatorname{int}([a,b])=(a,b)$.

3) O conjunto Z dos números inteiros não possui ponto interior, então, $\operatorname{int}(Z)=\phi$.

4) O conjunto Q dos números racionais, também, não possui ponto interior, isto é, $\operatorname{int}(Q)=\phi$. (Dado $c\in Q$, qualquer intervalo aberto $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, com $\varepsilon>0$, contém infinitos pontos racionais e infinitos pontos irracionais.).

5) O conjunto vazio é aberto, assim como o conjunto R dos números reais é aberto.

6) Todo intervalo aberto (limitado ou não) é um conjunto aberto.

Teorema 4.2

a) A interseção de um número finito de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto; em outras palavras, se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são conjuntos abertos, então, o conjunto $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ é também aberto.

b) A união de uma família qualquer de conjuntos abertos é também um conjunto aberto; em outras palavras, se $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família qualquer de conjuntos abertos, então, $A=\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração

a) Se $a \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, como cada $A_j, j = 1,2,\cdots,n$ é aberto, então, existe $\varepsilon_j > 0$, tal que $(a-\varepsilon_j, a+\varepsilon_j) \subset A_j, j = 1,2,\cdots,n$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots, \varepsilon_n\}$, então, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$; logo, o conjunto $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto.

b) Se $a \in A$, então, $a \in A_\lambda$, para algum λ. Como A_λ é aberto, existe $\varepsilon > 0$, tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A_\lambda \subset A$, então, todo ponto $a \in A$ é interior; portanto, A é aberto.

Observação 4.3

No item b, do teorema anterior, temos que a união de uma infinidade de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Esse resultado não vale para interseção. Por exemplo, considere os intervalos abertos

$$A_1 = (-1,1),\ A_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \cdots,\ A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \cdots,\ n \in N..$$

Então, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \{0\}$, que é um conjunto fechado.

De fato, se $a \neq 0$, então, existe $n \in N$, tal que $|a| \geq \frac{1}{n}$; portanto, $a \notin A_n$; logo,

$$a \notin A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots.$$

Exercício 4.4

Considere a família de intervalos abertos $A_n = \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$, tal que $n \in N$. Qual é o conjunto interseção de todos esses conjuntos? Esse conjunto é fechado ou aberto? Justifique sua resposta.

Um número a é ponto de **acumulação** de um conjunto X, se toda vizinhança de a contém infinitos pontos de X. Isso equivale a dizer que toda vizinhança de a contém algum ponto de X diferente de a; ou, ainda, que, dado $\varepsilon > 0$, o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contém algum ponto de X diferente de a. Denotaremos o conjunto de todos os pontos de acumulação de um conjunto X por X'.

Observação 4.5

1) Um ponto de acumulação de um conjunto X pode ou não pertencer a esse conjunto. Por exemplo, se $X = [0,1]$, então, 0 e 1 são pontos de acumulação de X que pertencem a X. No entanto, se $X = (0,1)$, 0 e 1 são pontos de acumulação de X que não pertencem a X. Se $X = [a,b], (a,b], [a,b)$ *ou* (a,b), então, todos os pontos de X são pontos de acumulação de X.

2) Dado $X = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots\right\}$, $a = 1$ é ponto de acumulação de X; mais ainda, 1 é o único ponto de acumulação de X, isto é, $X' = \{1\}$. Você se lembra que, na Unidade 1, demonstramos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$? Pois é, toda vez que uma sequência (a_n) é tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, sendo $a_n \neq a$, para uma quantidade infinita de índices n, então, a é ponto de acumulação do conjunto $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$; mais ainda, $X' = \{a\}$.

Exercício 4.6

Demonstre que, se a é ponto de acumulação de um conjunto X, então, existe uma sequência de pontos em $X - \{a\}$ que converge para a.

Um ponto $a \in X$ é chamado **ponto isolado,** se não for ponto de acumulação. Em outras palavras, $a \in X$ é ponto isolado, se existir uma vizinhança de a que não contém ponto de X diferente de a, ou, ainda, se existir $\varepsilon > 0$, tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Um conjunto X é chamado **discreto,** se todos os seus pontos são isolados.

Exemplos 4.7

1) O conjunto Z dos números inteiros é um conjunto discreto.

2) O conjunto dos números racionais Q não possui pontos isolados.

3) O conjunto $X = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots\right\}$ é um conjunto discreto.

Um número a é chamado ponto de **aderência** de um conjunto X, ou ponto **aderente** a X, se qualquer vizinhança de a contém algum ponto de X. O conjunto de todos os pontos aderentes a X é chamado **fecho** de X, ou aderência de X, e é denotado por $\overline{X}$. Então, $\overline{X} = X \cup X'$.

Um conjunto é chamado **fechado,** quando $\overline{X} = X$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X, ou, ainda, quando ele contém todos os seus pontos de acumulação.

Exemplos 4.8

1) O intervalo fechado $[a,b]$ é um conjunto fechado.

2) O conjunto $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots\right\} \cup \{1\}$ é um conjunto fechado.

Teorema 4.9

O fecho $\overline{X}$ de um conjunto X é um conjunto fechado.

Demonstração

Seja a um ponto aderente a $\overline{X}$. Demonstraremos que a é aderente a X. Dado $\varepsilon > 0$, o intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contém algum $y \in \overline{X}$ (que pode ou não ser o próprio a). Assim, o mesmo intervalo é também uma vizinhança de y; logo, contém algum ponto $z \in X$. Portanto, a é aderente a X.

Teorema 4.10

Um conjunto F é fechado, se, e somente se, seu complementar $A = F^c = R - F$ é aberto.

Demonstração

Seja F fechado e $a \in A$. Como $a \notin F$, existe uma vizinhança V contendo a, que não intercepta F; então, $V \subset A$; consequentemente, a é ponto interior de A. Portanto, A é aberto. Reciprocamente, se o conjunto A é aberto e o ponto a é ponto aderente a $F = R - A$, então, toda vizinhança de a contém algum ponto de F. Logo, a não é ponto interior de A. Sendo A um conjunto aberto, temos que $a \notin A$; então, $a \in F$; portanto, F é um conjunto fechado.

Exercício 4.11

Demonstre que um ponto a é aderente ao conjunto X, se, e somente se, ele é limite de uma sequência $x_n \in X$.

Teorema 4.12

a) A união de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado, isto é, se $F_1, F_2, \cdots, F_n$ são conjuntos fechados, então, o conjunto $F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ é também fechado.

b) A interseção de uma família qualquer de conjuntos fechados é também um conjunto fechado. Em outras palavras, se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados, então, $F = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto fechado.

Demonstração

a) Seja a um ponto de acumulação de F, demonstraremos que $a \in F$. Como a é um ponto de acumulação de F, então, toda vizinhança V de a intercepta F e, portanto, intercepta algum $F_j, j = 1, 2, \cdots, n$. Ou seja, a será ponto de acumulação de algum $F_j, j = 1, 2, \cdots, n$. Como F_j é fechado, então, $a \in F_j$; logo, $a \in F$.

b) **Exercício**.

Observação 4.13

No item (a), temos que a união de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado. Esse resultado não vale para uma quantidade infinita de fechados. Por exemplo, o intervalo aberto $(a,b) = \bigcup_{x \in (a,b)} \{x\}$, ou seja, todo intervalo aberto é a união infinita de conjuntos fechados, formado por cada um de seus pontos.

Sejam X e Y conjuntos, tais que $X \subset Y$. Dizemos que X é **denso** em Y, quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo ponto $b \in Y$ é aderente a X.

Exemplos 4.14

1) O conjunto dos números racionais Q é denso nos reais R.

2) O conjunto dos números irracionais Q^c é também denso nos reais R.

Um conjunto $X \subset R$ chama-se **compacto,** quando é fechado e limitado.

Exemplos 4.15

1) Se $X \subset R$ é um conjunto finito, então, é compacto.

2) Um intervalo fechado $[a,b]$ é compacto.

3) Os intervalos (a,b), $[a,b)$ e $(a,b]$ não são compactos, pois não são conjuntos fechados.

4) O conjunto dos números inteiros Z não é compacto, pois não é um conjunto limitado.

O resultado que enunciaremos, a seguir, estabelece uma condição necessária e suficiente para que um subconjunto de números reais seja um conjunto compacto.

Teorema 4.16

Um conjunto $X \subset R$ é compacto, se, e somente se, toda sequência de pontos de X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.

Demonstração

Exercício.

Observação 4.17

Se $X \subset R$ é compacto, então, $a = \inf X$ e $b = \sup X$ pertencem a X. Portanto, todo conjunto compacto contém um elemento mínimo e um elemento máximo. Ou seja, existem $a, b \in X$, tais que $a \leq x \leq b, \forall x \in X$.

Exercícios 4.18

1) Seja a um ponto de acumulação de um conjunto X. Demonstre que existe uma sequência crescente ou uma sequência decrescente de pontos $a_n \in X$, com $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$.

2) Demonstre que uma reunião finita e uma interseção arbitrária de conjuntos compactos são ainda um conjunto compacto.

LIMETE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Objetivos

- Demonstrar, usando a definição de limite de uma função, que o limite de uma determinada função f, quando a variável se aproxima de um valor a, é um determinado valor L.
- Demonstrar, usando a definição de continuidade de uma função, que uma determinada função f é contínua em um determinado ponto a.
- Reconhecer os pontos de continuidade de uma função.
- Calcular limite de funções, usando propriedades de limite.
- Demonstrar propriedades de limite e de continuidade de uma função.
- Calcular limites laterais de uma determinada função.
- Reconhecer os pontos de descontinuidade de uma determinada função definida por mais de uma sentença.
- Demonstrar propriedades de limites no infinito e limites infinitos de funções.
- Demonstrar que todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.
- Usar a definição de continuidade uniforme de funções, para demonstrar propriedades relacionadas com esse conceito.

Introdução

Desde o ensino fundamental, passando pelo ensino médio e até pelas disciplinas de Cálculo, você teve oportunidade de trabalhar com diversos tipos de funções, as chamadas "funções especias" que têm aplicações nas mais diversas áreas das ciências.

O "ambiente natural" que utilizaremos para exemplificar os conteúdos, que serão abordados nesta Unidade, será, na maioria dos casos, o das "funções especiais", a saber: função constante, função do primeiro grau, função modular, função quadrática, função polinomial, função racional, função exponencial, função logarítmica, funções trigonométricas e as funções hiperbólicas.

A fim de que você possa compreender, de modo mais dinâmico, os conceitos que apresentaremos nesta Unidade, sugerimos, se você achar necessário, que faça um breve estudo relativo a essas funções especiais, utilizando, por exemplo, Flemming e Gonçalves (2007).

Certamente, você já estudou, mesmo que de modo superficial, o conceito de limite e de continuidade de funções. Nesta Unidade, abordaremos, de modo mais detalhado, esses conceitos e suas principais propriedades. Para isso, usaremos vários resultados vistos na Unidade 2, relativos a sequências de números reais.

Nesta Unidade, responderemos às seguintes perguntas: como podemos justificar a existência da raiz n–ésima de um número real positivo? Como podemos justificar a existência de máximo e mínimo de uma função contínua definida em um intervalo fechado, que muitas vezes você usou no curso de Cálculo?

Esta Unidade está dividida em 4 aulas, que deverão ser estudadas em 7 dias, já incluída a entrega das tarefas, e versará sobre os seguintes conteúdos:

Aula 1: Definições de limite e de continuidade de uma função real de variável real.

Aula 2: Propriedades do limite e da continuidade de uma função.

Aula 3: Limites laterais, limites no infinito e limites infinitos.

Aula 4: Teoremas sobre funções contínuas definidas em intervalos e continuidade uniforme.

Na aula 1, você estudará as definições de limite e de continuidade de funções, incluída uma interpretação geométrica de limite. Verá, também, exemplos e observações relacionados com esses conceitos.

Na aula 2, você estudará as principais propriedades de limite e de continuidade de funções, incluindo operações com limites e com funções contínuas.

Na aula 3, você estudará as definições de limites laterais (à esquerda e à direita), incluindo interpretação geométrica, além dos limites no infinito e limites infinitos de funções.

Na aula 4, você estudará o teorema do valor intermediário, o teorema de Weierstrass, a definição de função uniformemente contínua e propriedades, além de exemplos.

No decorrer de cada aula, você encontrará alguns exercícios para fixação e avaliação da aprendizagem.

Aula 1 - Definições de limite e de continuidade de uma função real de variável real

Objetivos

- Demonstrar, usando a definição, que o limite de uma função f, quando a variável se aproxima de um valor a, é um determinado valor L.
- Demonstrar, usando a definição, que uma função f é contínua em um determinado ponto a.

- Reconhecer os pontos de continuidade de uma função.

Iniciaremos com o conceito de função e seu gráfico, embora você já tenha visto esses conceitos em diversas oportunidades.

Sejam A e B subconjuntos não vazios dos números reais R. Uma **função** $f : A \to B$ é uma lei ou regra que, a cada elemento de A, faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado **domínio** de f e será denotado por $D(f)$, e o conjunto B é chamado **contradomínio** ou **campo de valores** de f. Em muitos casos, consideraremos o domínio da função como sendo os intervalos da reta, ou união destes, e o contradomínio como sendo o próprio conjunto dos números reais.

O **gráfico** de uma função f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ do plano coordenado cartesiano, em que $x \in D(f)$.

O conceito de limite surge da necessidade de calcular limite de razões incrementais, que definem derivadas, e esses limites são sempre do tipo $\frac{0}{0}$.

Considere a função $f : R - \{2\} \to R$, definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

e responda à seguinte questão:

a) O que acontece com os valores de $f(x)$, quando x se "aproxima" do valor 2, embora diferente de 2?

c) Faça um esboço do gráfico da função f.

Para responder à pergunta (a), construa uma tabela com vários valores que "se aproximam" de 2, sendo maiores do que 2, e também com vários valores que "se aproximam" de 2, sendo menores do que 2. O que você pode observar, em relação aos valores de $f(x)$, quando x se "aproxima" do valor 2? Certamente, você concluirá que esses valores "se aproximam" de 4. Nesse caso, dizemos que 4 é o limite de $f(x)$, quando x "se aproxima" de 2.

Observe que a variável x se aproxima de 2, sem coincidir com esse valor, e que o valor do qual x se aproxima, que é 2, é ponto de acumulação do domínio da função, que, nesse caso, não pertence ao domínio. Essas considerações permitem-nos melhor compreender a definição de limite de uma função, apresentada a seguir.

Sejam D um subconjunto do conjunto de números reais, $f : D \to R$ uma função real e $a \in D'$ um ponto de acumulação do conjunto D (que pode ou não pertencer a D). Dizemos que o número real L é **limite de $f(x)$, quando x tende para *a*,** se, dado $\varepsilon > 0$, existir um número $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in D, 0 < |x - a| < \delta$, tivermos $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Notações utilizadas nesta Unidade: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ou $f(x) \to L$, quando $x \to a$.

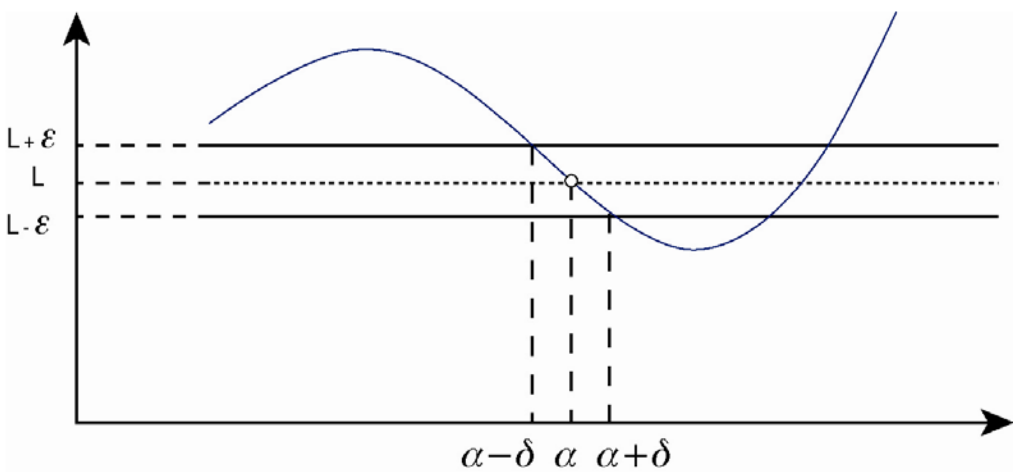

Figura 4: limite de $f(x)$ quando x tende para a

Uma outra definição relacionada ao conceito de limite é a definição de continuidade de uma função, que introduziremos, a seguir.

Dizemos que a função $f: D \to R$ é **contínua no ponto** $x = a \in D$, se existir o limite de $f(x)$, quando x tende para a e esse limite for igual ao valor $f(a)$; e dizemos que f é contínua em seu domínio, ou contínua, simplesmente, se ela for contínua em todos os pontos desse domínio.

Apresentaremos, agora, várias observações que permitirão melhor compreensão das definições de limite e de continuidade de uma função em um ponto.

Observações 5.1

1) Informalmente, dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa dizer que podemos "tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto desejarmos", "desde que tomemos x suficientemente próximo (porém diferente) do valor *a*."

2) A ideia "tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto desejarmos" é traduzida, matematicamente, pela desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$, sendo ε um número positivo qualquer, tão pequeno quanto se possa imaginar. Já a ideia "desde que tomemos x suficientemente próximo (porém diferente) do valor *a*" significa que deve existir um intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$, tal que, se x estiver nesse intervalo, com $x \neq a$ e x pertencer ao domínio D (isto é, $x \in D, 0 < |x - a| < \delta$), então, deve valer a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$.

3) Simbolicamente, dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa dizer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

4) A condição $0 < |x - a|$ significa que, ao calcularmos $\lim_{x \to a} f(x)$, não nos interessa o valor de $f(x)$ para $x = a$, esse valor pode até nem existir.

5) O conceito de limite é introduzido para caracterizar o comportamento da função $f(x)$ nas proximidades do valor *a*, mantendo-se sempre x diferente do valor *a*, de

modo que podemos mudar o valor da função no ponto como quisermos, sem que isso mude o valor do limite.

6) Se a função já está definida em a e seu valor nesse ponto coincide com seu limite, então, a função é contínua nesse ponto. Muitas vezes, quando a função não está definida, mas existe limite no ponto a, costuma-se defini-la nesse ponto como sendo o valor do limite.

7) Simbolicamente, dizer que $f : D \to R$ é **contínua** em $a \in D$ significa dizer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in D; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   Quando f não é contínua em a, dizemos que f é **descontínua** em a.

8) Dizemos que $f : D \to R$ é contínua, quando ela é contínua em todos os pontos de D.

9) Sempre que nos referirmos ao limite de uma função com x tendendo ao valor a, estamos admitindo que a é ponto de acumulação do domínio da função, mesmo que isso não seja dito explicitamente.

10) Admitindo que $f : D \to R$ é uma função real e $a \in D'$ um ponto de acumulação do conjunto D, negar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa dizer que existe $\varepsilon > 0$, tal que, para qualquer $\delta > 0$, podemos sempre encontrar $x_\delta \in D$, tal que

$$0 < |x_\delta - a| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon .$$

11) Dizer que $f : D \to R$ não é contínua em $a \in D$ significa dizer que existe $\varepsilon > 0$, tal que, para qualquer $\delta > 0$, podemos sempre encontrar $x_\delta \in D$, tal que

$$|x_\delta - a| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon .$$

Exemplo 5.2

Dada a função $f : R - \{2\} \to R$, definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, demonstre que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Demonstração

Como

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \text{ e } x \neq 2,$$

Simplificando essa expressão, obtemos

$$f(x) = x + 2 .$$

De acordo com a definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$, tal que

$$|(x + 2) - 4| < \varepsilon ,$$

sempre que

$$x \in R - \{2\}, 0 < |x - 2| < \delta .$$

Como

$$|(x+2) - 4| = |x - 2| < \varepsilon ,$$

escolhendo $\delta = \varepsilon$, temos que $|(x+2)-4| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x-2| < \delta$, concluindo, assim, a demonstração.

Exemplo 5.3

Um dos exemplos mais importantes de limite é a derivada de uma função f em um ponto $x = a$, que é o $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, quando esse limite existe.

Observação 5.4

No caso do exemplo 5.2, a função f é contínua em todos os pontos de seu domínio. Se definirmos o valor da função f, no ponto $x = 2$, como sendo 4, a função dada será contínua em todos os pontos da reta real R.

Exercícios 5.5

1) Se $f(x) = -3x + 2$, demonstre que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -7$.

2) Se $f(x) = cx + d$, em que c e d são constantes reais com $c \neq 0$, demonstre que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = ca + d$ e verifique que f é contínua em toda a reta real R.

3) Considere a função $f : R \to R$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-a^2}{a-x}, & se\ x\neq a\\ 2a, & se\ x=a\end{cases}.$$

Para que valores reais de x, a função f é contínua? Justifique sua resposta.

Aula 2 - Propriedades do limite e da continuidade de uma função

Objetivos

- Calcular limite de funções, usando propriedades de limite.
- Demonstrar propriedades de limite e de continuidade de uma função.

Propriedades do limite

Propriedades análogas às de limite de sequências, estudadas na Unidade 2, valem para limites de funções, inclusive, com demonstrações também análogas.

Teorema 5.6

Se existe $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então, existem $\lim_{x\to a}|f(x)|$ e $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$. Em particular, se f é contínua em $x = a$, então, a função $|f(x)|$ é também contínua nesse ponto, ou seja, $\lim_{x\to a}|f(x)| = |f(a)|$.

Demonstração

Exercício

Sugestão: use a desigualdade $\left||f(x)| - |L|\right| \le |f(x) - L|$ e a definição de limite de f no ponto $x = a$.

Observação 5.7

A recíproca do teorema anterior só é verdadeira, em geral, quando $L = 0$.

Teorema 5.8

Sejam $f, g : D \to R$, $a \in D'$, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Se $L < M$, então, existe $\delta > 0$, tal que $f(x) < g(x), \forall x \in D$, tal que $0 < |x - a| < \delta$.

Demonstração

Seja $K = \dfrac{L+M}{2}$. Fazendo $\varepsilon = K - L = M - K$, temos que $\varepsilon > 0$ e $K = L + \varepsilon = M - \varepsilon$. Pela definição de limite, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que $x \in D, 0 < |x - a| < \delta_1$ implica que $L-\varepsilon < f(x) < K$ e $x \in D, 0 < |x-a| < \delta_2$ implica que $K < g(x) < M+\varepsilon$. Portanto, considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $x \in D, 0 < |x-a| < \delta$ implica que $f(x) < K < g(x)$.

Teorema 5.9 (Teorema do confronto)

Sejam $f, g, h : D \to R$, $a \in D'$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$. Se

$$f(x) \le h(x) \le g(x), \forall x \in D - \{a\},$$

Então, $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

Demonstração

De $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L$, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0 \; e \; \delta_2 > 0$, tais que $x \in D, 0 < |x-a| < \delta_1$ implica $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$ e $x \in D, 0 < |x-a| < \delta_2$ implica $L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon$. Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $x \in D, 0 < |x-a| < \delta$ implica $L-\varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < L+\varepsilon$; logo, $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

Exercícios 5.10

Calcule os seguintes limites:

1) $\lim_{x\to 0} x^2 \left| sen \frac{1}{x} \right|$;

2) $\lim_{x\to 0} x^2 sen \frac{1}{x}$.

O teorema, a seguir, fornece uma condição necessária e suficiente para a existência do limite de uma função, a partir do limite de sequências, estudado na Unidade 2.

Teorema 5.11

Sejam $f : D \to R$, $a \in D'$. O $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in D - \{a\}$ com $\lim_{x \to +\infty} x_n = a$, tivermos $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

Demonstração

$\Rightarrow$) Inicialmente, vamos supor que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e que tenhamos uma sequência qualquer de pontos $x_n \in D - \{a\}$ com $\lim_{x \to +\infty} x_n = a$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$, temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$ e, além disso, existe também $n_0 \in N$, tal que $\forall n > n_0$, temos $0 < |x_n - a| < \delta$, já que $\lim_{x \to +\infty} x_n = a$. Portanto, $\forall n > n_0$, temos que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$; logo, $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

$\Leftarrow$) Admitindo, agora, que, para toda sequência de pontos $x_n \in D - \{a\}$ com $\lim_{x \to +\infty} x_n = a$, temos que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$, devemos demonstrar $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Negar essa afirmação significa afirmar a existência de $\varepsilon > 0$, tal que, para todo $n \in N$, podemos encontrar $x_n \in D - \{a\}$, tal que $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, mas $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Desse modo, teríamos uma sequência $x_n \in D - \{a\}$ com $\lim_{x \to +\infty} x_n = a$, sem que tenhamos $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$, que é uma contradição.

Corolário 5.12

Dada uma função $f : D \to R$, $a \in D'$, uma condição necessária e suficiente para que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ é que $f(x_n)$ tenha limite, qualquer que seja a sequência $x_n \in D - \{a\}$, com $\lim_{x \to +\infty} x_n = a$.

Demonstração

Pelo teorema anterior, é suficiente demonstrarmos que o $\lim_{n \to +\infty} f(x_n)$ é o mesmo, qualquer que seja a sequência $x_n \in D - \{a\}$, com $x_n \to a$. Para isso, sejam $x_n, y_n \in D - \{a\}$ sequências, com $x_n \to a, y_n \to a$, demonstraremos que $f(x_n)\ e\ f(y_n)$ têm o mesmo limite. Suponha que $L_1\ e\ L_2$ sejam esses limites, respectivamente, e consideremos a sequência (z_n), definida como $z_{2k} = x_k\ e\ z_{2k-1} = y_k$; então, $z_n \to a$. Como $f(z_n)$ converge para certo número L e $f(x_n), f(y_n)$ são subsequências de $f(z_n)$, então, elas convergem para o mesmo valor L. Ou seja, $L_1 = L_2 = L$.

Corolário 5.13 (Operações com limite.)

Sejam $f, g : D \to R$, $a \in D'$, com $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Então:

a) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

b) $\lim_{x \to a} [f(x) g(x)] = L.M$;

c) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, se\ M \neq 0.$

d) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e g é uma função limitada em uma vizinhança de $x = a$, então, $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = 0$.

Demonstração

As demonstrações dessas propriedades seguem das propriedades análogas para sequências, estudadas na Unidade 2, teoremas 2.18 e 2.20.

Exemplo 5.14

Seja $f : R \to R$, definida por $f(x) = 0$, quando x é racional, e $f(x) = 1$, quando x é irracional. Dado $a \in R$, podemos obter uma sequência de números racionais $x_n \neq a$ e uma sequência de números irracionais $y_n \neq a$, com $\lim\limits_{x \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = a$. Então, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = 0 \; e \; \lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = 1$, portanto, não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Exercícios 5.15

1) Calcule os seguintes limites:

A) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x}, a > 0$;

B) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{a}}{x}, a > 0$.

2) Seja $f : R - \{0\} \to R$ a função definida por $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Demonstre que não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Pesquise sobre o gráfico de f. Sugestão: considere a sequência $x_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$ e analise o limite dessa sequência, quando n é par e quando n é ímpar.

3) Dada $f : R - \{0\} \to R$, definida por $f(x) = x.sen\left(\frac{1}{x}\right)$, existe $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifique sua resposta. Pesquise sobre o gráfico de f.

Teorema 5.16

Sejam $f : D \to R$, $a \in D$. A função f é contínua em a, se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in D$ com $\lim_{x\to +\infty} x_n = a$, tivermos $\lim_{n\to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Demonstração

A demonstração desse teorema segue como a demonstração do teorema 5.11, substituindo L por $f(a)$.

Teorema 5.17

Sejam $f : D \to R$, $a \in D'$. Se existe L, tal que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então, existe uma vizinhança de a, na qual f é limitada. Ou seja, existem $\delta > 0$ e $k > 0$, tais que, para todo $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$, temos que $|f(x)| < k$.

Demonstração

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$, tal que $\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta$, temos que $|f(x) - L| < 1$. Como $|f(x)| = |f(x) - L + L| \le |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$, basta considerar $k = 1 + |L|$.

O resultado, a seguir, estabelece que propriedades análogas às de limite de funções, corolário 5.13, valem para continuidade de funções.

Teorema 5.18

Se f e g são funções contínuas em $x = a$, então, são também contínuas em $x = a$, as funções $f + g$, fg e kf, em que k é uma constante real qualquer. Além disso, também é contínua a função $\dfrac{f}{g}$, desde que $g(a) \neq 0$.

O próximo resultado fornece uma condição necessária e suficiente para que o limite de uma função em um determinado ponto exista. Sua demonstração é uma consequência do critério de Cauchy, para sequência de números reais, estudado na Unidade 2.

Teorema 5.19 (Critério de convergência de Cauchy).

Sejam $f : D \to R$, $a \in D'$. Uma condição necessária e suficiente para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ é que, dado $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$, tal que, para todo $x, y \in D$, com $0 < |x - a| < \delta$ e $0 < |y - a| < \delta$, tivermos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Teorema 5.20 (Continuidade da função composta)

Sejam f e g funções com domínios D_f e D_g, respectivamente, com $g(D_g) \subset D_f$. Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então, $h(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Demonstração

Exercício

Aula 3 - Limites laterais, limites no infinito e limites infinitos

Objetivos

- Calcular limites laterais de uma função.

- Reconhecer os pontos de descontinuidade de uma função definida por mais de uma sentença.

- Demonstrar propriedades de limites no infinito e limites infinitos de funções.

Limites Laterais

A fim de introduzirmos as definições de limites laterais, necessitamos apresentar dois conceitos, que faremos, a seguir.

Seja $D \subset R$. Dizemos que o número real a é **ponto de acumulação à direita** para D, quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in D, x > a$. Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, D \cap (a, a+\varepsilon) \neq \phi$. Analogamente, dizemos que o número real a é **ponto de acumulação à esquerda** para D, quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in D, x < a$. Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, D \cap (a-\varepsilon, a) \neq \phi$.

Sejam $f : D \to R$ e a ponto de acumulação à direita para D. Dizemos que L é **limite à direita** de $f(x)$, quando x tende para a e denotamos por $L = \lim_{x \to a^+} f(x)$, quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in D \cap (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

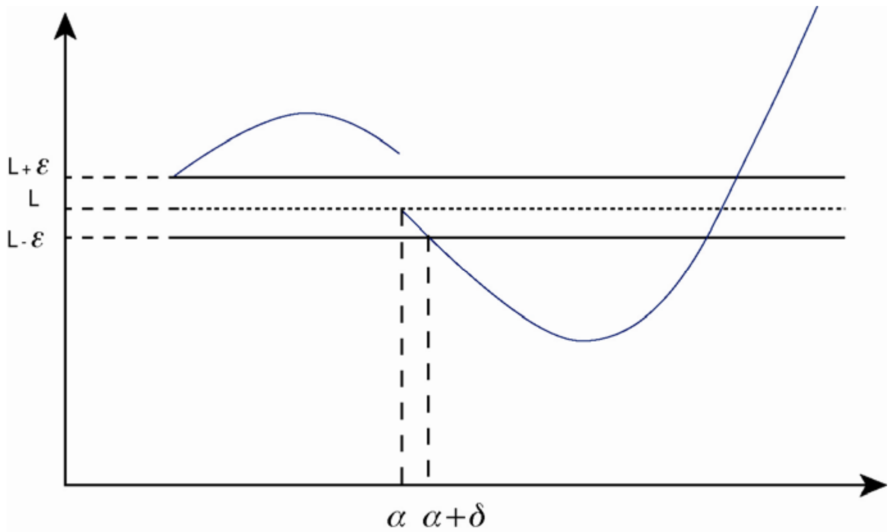

Figura 5: limite à direita de a

Analogamente, se a é ponto de acumulação à esquerda para D, dizemos que L é **limite à esquerda** de $f(x)$, quando x tende para a e denotamos por $L = \lim_{x \to a^-} f(x)$, quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in D \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

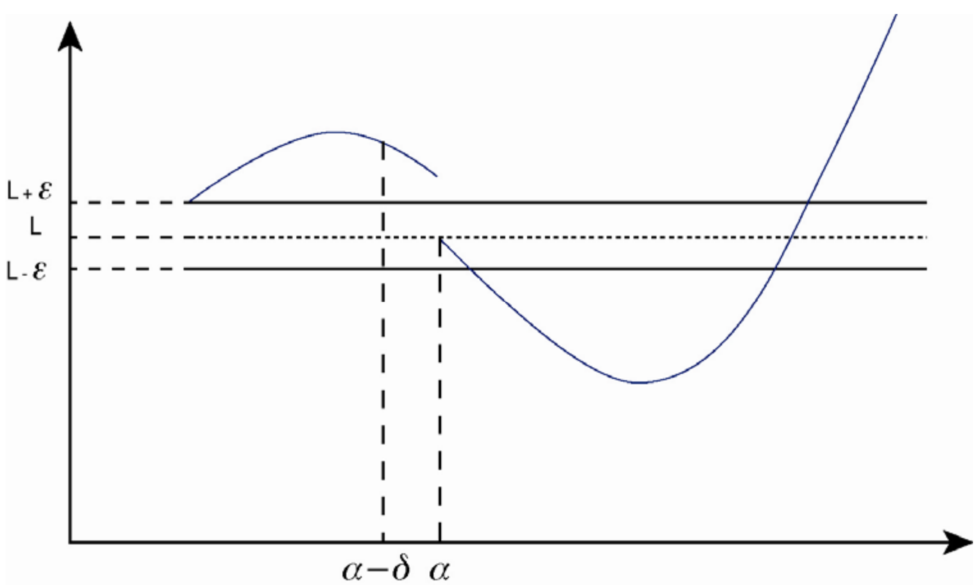

Figura 6: limite à esquerda de a

As propriedades dos limites de funções demonstradas anteriormente na aula 2, desta Unidade, podem ser adaptadas facilmente para os limites laterais.

Observação 5.21

Segue das definições de limite e de limites laterais que, dados $f : D \rightarrow R$, a, ponto de acumulação à direita e à esquerda para D, existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se, e somente se, existem os limites laterais e são iguais a L, ou seja,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Exemplos 5.22

1) Seja $f : R - \{0\} \rightarrow R$, definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Então, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, enquanto $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$. Portanto, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

De fato, como $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$, então, $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$; assim, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

3) Seja $g : R - \{0\} \to R$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$, então, não existe $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e nem $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Entretanto, a função $h(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ possui $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$ e não possui $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$.

Teorema 5.23

Seja $f : D \to R$ uma função monótona limitada. Então, para todo ponto de acumulação à direita, a, para D, e para todo ponto de acumulação à esquerda, b, para D, existem $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = M$. Isto é, existem sempre os limites laterais de uma função monótona limitada.

Demonstração

Suponhamos que f seja não decrescente. Como f é limitada, pelo axioma do supremo, visto na Unidade 1, existe $L = \inf\{f(x); x \in D, x > a\}$. Nessas condições, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, $L + \varepsilon$ não é cota inferior do conjunto limitado (observação 1.4) $\{f(x); x \in D, x > a\}$. Logo, existe $\delta > 0$, tal que $a + \delta \in D$ e $L \le f(a + \delta) < L + \varepsilon$. Como f é não decrescente, $x \in D \cap (a, a + \delta)$ implica $L \le f(x) < L + \varepsilon$, concluindo, assim, a justificativa da afirmação. Analogamente, demonstra-se que $M = \sup\{f(x); x \in D, x < b\}$ é o $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = M$.

Limites no infinito e limites infinitos

A definição de limite de uma função se estende aos casos em que a função ou a variável independente, ou ambas, tendem a valores infinitos, tanto positiva, quanto negativamente.

Seja $D \subset R$, ilimitado superiormente. Dada $f : D \to R$, dizemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0; x \in D, x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Analogamente, dizemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0; x \in D, x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Sejam $f : D \to R$ e a ponto de acumulação de D. Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, quando, dado

$$K > 0, \exists \delta > 0; x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K.$$

Analogamente, dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, quando, dado

$$K > 0, \exists \delta > 0; x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -K.$$

Podemos definir, também, os seguintes limites:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ e

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

As propriedades de limites de funções estudadas nesta Unidade, com as devidas adaptações, valem para limites infinitos e limites no infinito.

Exercícios 5.24

1) Dada a função $f : R \to R$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 - 17x + 6}{x-3}, \ se\ x < 3 \\ 4 + ax - x^2, \ se\ x \geq 3 \end{cases},$$

determine $a \in R$, para que exista $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

2) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 4ax, \ se\ x < 2, \\ 4ax^2 - 9x + 12, \ se\ x \geq 2 \end{cases}$$

Encontre o valor da constante a, para que a função dada seja contínua para todo valor real de x .

3) Seja a uma constante real não nula. Demonstre que

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, \ se\ 0 < a < 1 \\ 0, \ se\ a > 1 \end{cases}$

b) $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, \ se \ 0 < a < 1 \\ +\infty, \ se \ a > 1 \end{cases}$

4) Seja n um número inteiro positivo. Demonstre que

a) $\lim_{x \to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty, \ se \ n \ for \ par \\ -\infty, \ se \ n \ for \ ímpar \end{cases}$

b) $\lim_{x \to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$

Aula 4 - Teoremas sobre funções contínuas definidas em intervalos e continuidade uniforme

Objetivos

- Fazer aplicações do teorema do valor intermediário.
- Usar a definição de continuidade uniforme de funções, para demonstrar propriedades relacionadas com esse conceito.
- Verificar se determinadas funções são ou não uniformemente contínuas.

Iniciamos a aula com

Teoremas sobre funções contínuas definidas em intervalos

A seguir, você verá um resultado, cuja demonstração, geralmente, não é estudada no curso de Cálculo.

Teorema 5.25 (Teorema do valor intermediário)

Seja $f:[a,b]\to R$ uma função contínua. Se $f(a)<d<f(b)$, então, existe $c\in(a,b)$, tal que, $f(c)=d$. Ou seja, a função f assume todos os valores compreendidos entre $f(a)$ e $f(b)$.

Demonstração

Considere o conjunto

$$X=\{x\in[a,b];\, f(t)<d,\, em,\, a\le t<x\}.$$

Como f é contínua em a, existe $\delta>0$, tal que $a\le x<a+\delta\Rightarrow f(x)<d$; logo, o conjunto X é não vazio. Como ele é limitado superiormente pelo axioma do supremo, ele possui supremo, que denotaremos por c. Obviamente, $a<c$. É também óbvio que $c<b$, pois $f(x)>d$ em uma vizinhança de b. Demonstraremos que $f(c)=d$. Se $f(c)<d$, existiria uma vizinhança de $c,(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$, tal que $f(x)<d,\forall x\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$, então, o supremo de X seria maior do que c, que é uma contradição. Analogamente, se $f(c)>d$, existiria uma vizinhança de $c,(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$, tal que $f(x)>d,\forall x\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$; então, o supremo de X teria que ser menor do que c, que é também uma contradição. A demonstração é análoga, se tivermos $f(a)>d>f(b)$.

Corolário 5.26

Se $I \subset R$ é um intervalo e $f : I \to R$ é contínua, então, $f(I)$ é um intervalo.

Demonstração

Se f for constante, então, $f(I)$ é um intervalo formado por um único ponto. Caso contrário, sejam $\alpha = \inf f(I) = \inf\{f(x); x \in I\}$ e $\beta = \sup f(I) = \sup\{f(x); x \in I\}$. Se $f(I)$ for ilimitado inferiormente, tomaremos $\alpha = -\infty$. Caso $f(I)$ seja ilimitado superiormente, tomaremos $\beta = +\infty$. Para provar que $f(I)$ é um intervalo (aberto, fechado ou semiaberto) cujos extremos são $\alpha\ e\ \beta$, seja d, tal que $\alpha < d < \beta$. Pela definição de ínfimo e de supremo, existem $a, b \in I$, tais que $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta$. Pelo teorema anterior, existe $c \in (a,b)$, tal que $f(c) = d$. Então, $d \in f(I)$, ou seja, $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Entretanto, $\alpha = \inf f(I)$ e $\beta = \sup f(I)$. Portanto, nenhum número real menor do que α ou maior do que β pode pertencer a $f(I)$. Concluímos, portanto, que $f(I)$ é um intervalo de extremos α e β.

Exercício 5.27

Usando o teorema do valor intermediário, demonstre que todo polinômio de grau ímpar, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, possui, pelo menos, uma raiz real.

O exemplo, a seguir, responde a uma das perguntas que foi feita no início desta disciplina: a justificativa sobre a existência da $\sqrt[n]{a}$, em que, $a \in R, a \geq 0$.

Exemplo 5.28

Fixado $n \in N$, a função definida por $f(x) = x^n$ é crescente (portanto, injetiva), como $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, pelo corolário 5.26, $f([0,+\infty)) = [0,+\infty)$. Ou seja, $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma bijeção. Portanto, dado um número real $a \geq 0$, existe um único número real $b \geq 0$, tal que $b^n = a$. Ou seja, $b = \sqrt[n]{a}$. No caso de n ser um número natural ímpar, a função f é uma bijeção de R em R; nesse caso, todo número real a possui uma raiz $n-ésima$, que é positiva, quando $a > 0$ e negativa, quando $a < 0$.

O resultado, a seguir, com certeza, foi usado por você no curso de Cálculo Diferencial, para encontrar os pontos de máximos e mínimos de uma função real, definida em um conjunto compacto (no caso de um intervalo fechado, por exemplo).

Teorema 5.29 (de Weierstrass)

Sejam $f : D \to R$ uma função contínua e $D \subset R$ um subconjunto compacto. Então, existem $a, b \in D$, tais que $f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in D$. Ou seja, a função f assume máximo e mínimo em D.

Demonstração

Provaremos, inicialmente, que $f(D)$ é um conjunto compacto. Seja $y_n \in f(D)$ uma sequência. Devemos demonstrar que essa sequência possui uma subsequência convergindo para um ponto de $f(D)$. Como $y_n \in f(D)$, então, existe $x_n \in D$, tal que $y_n = f(x_n)$. Como D é compacto, (x_n) possui uma subsequência x_{n_k} que converge para algum ponto a de D. Como f é contínua, $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ converge para $f(a)$. Portanto, $f(D)$ é um conjunto compacto.

Demonstraremos, agora, que existem $a, b \in D$, tais que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in D.$$

De fato, como $f(D)$ é um conjunto compacto, existem $m, M \in f(D)$, tais que $m \leq y \leq M, \forall y \in f(D)$. Como $m, M \in f(D)$, existem $a, b \in D$, tais que $m = f(a)$ e $M = f(b)$. Portanto, $f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in D$.

Um conceito muito importante que usaremos ainda nesta disciplina e, também, será usado nas disciplinas de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais, é o de continuidade uniforme.

Uma função $f : D \to R$ é chamada **uniformemente contínua** em *D*, quando, dado qualquer $\varepsilon > 0$, for possível encontrar $\delta > 0$, tal que

$$x \in D, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exemplo 5.30

Sejam $c > 0$, uma constante real, $D = \{x \in R; x > c\}$ e $f : D \to R$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}, x \in D$. Então, f é uniformemente contínua em D.

Dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$, tal que

$$x \in D,\ y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon .$$

Sabemos que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - x}{xy}\right| = \frac{|y - x|}{xy}.$$

Como $x > c$ e $y > c$, então, $xy > c^2$; logo:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \frac{|y - x|}{c^2} < \frac{\delta}{c^2}.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, considere $0 < \delta < c^2\varepsilon$. Desse modo, obtemos a continuidade uniforme da função f em D.

Observação 5.31

Podemos concluir, facilmente, a seguinte afirmação: se uma função é uniformemente contínua em um conjunto D, então, ela é contínua em D. O exercício, a seguir, apresenta um exemplo de uma função que é contínua em um conjunto D; entretanto, não é uniformemente contínua nesse conjunto.

Exercício 5.32

Considere a função $f : D \to R$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in D$, em que $D = \{x \in R; x > 0\}$.

Demonstre que f não é uniformemente contínua em D.

Teorema 5.33

Seja $D \subset R$ um conjunto compacto. Então, toda função contínua $f : D \to R$ é uniformemente contínua.

Demonstração

Suponha que f não seja uniformemente contínua em D. Então, existe $\varepsilon > 0$, tal que, para $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$, existem pontos $x_n, y_n \in D$, tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \; e \; |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon .$$

Como D é compacto, existe uma subsequência (x_{n_i}) de (x_n), convergindo para $a \in D$. Pela desigualdade $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$, temos que (y_{n_i}) também converge para a. Mas f é contínua, então, $f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})$ deveria convergir para zero. Esse fato é uma contradição com a desigualdade $|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \geq \varepsilon$.

Exercício 5.34

Dizemos que uma função f satisfaz a condição de Lipschitz em intervalo *I*, se existe uma constante K, tal que $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|, \forall x, y \in I$. Demonstre que toda função que satisfaz a condição de Lipschitz é uniformemente contínua.

DERIVADA DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Objetivos

- Demonstrar, usando a definição de limite de uma função, que o limite de uma determinada função f, quando a variável se aproxima de um valor a, é um determinado valor L.
- Demonstrar, usando a definição de continuidade de uma função, que uma determinada função f é contínua em um determinado ponto a.
- Reconhecer os pontos de continuidade de uma função.
- Calcular limite de funções, usando propriedades de limite.
- Demonstrar propriedades de limite e de continuidade de uma função.
- Calcular limites laterais de uma determinada função.
- Reconhecer os pontos de descontinuidade de uma determinada função definida por mais de uma sentença.
- Demonstrar propriedades de limites no infinito e limites infinitos de funções.
- Demonstrar que todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.
- Usar a definição de continuidade uniforme de funções, para demonstrar propriedades relacionadas com esse conceito.

Introdução

Nesta Unidade, você estudará, de modo mais detalhado, derivadas de funções, conceito que, certamente, conheceu quando cursou a disciplina de Cálculo. Mais especificamente, responderemos às seguintes perguntas:

1) O que significa uma função ser derivável em um ponto? E em um intervalo?
2) Qual é o significado geométrico da derivada de uma função em um ponto?
3) Quais as principais propriedades da derivada de uma função?
4) Que relação existe entre o conceito de derivada de uma função em um ponto com o conceito de continuidade de uma função em um ponto?

Nesta Unidade, além de Ávila (1999), Bartle (1983), Lima (2007) e Figueiredo (1974), trabalhamos com Flemming e Gonçalves (2007), principalmente, nas aulas 2 e 3. Esta Unidade está dividida em 3 aulas, que deverão ser estudadas em 7 dias, já incluída a entrega das tarefas, e inclui os seguintes conteúdos:

Aula 1: Derivada de uma função real de variável real.

Aula 2: Derivada e continuidade, operações com funções deriváveis.

Aula 3: Máximos e mínimos de funções, teoremas sobre derivadas, regras de L'Hôpital, fórmula de Taylor.

Na aula 1, será abordada a definição de derivada em um ponto e em um intervalo; a interpretação geométrica da derivada de uma função em um ponto; e diversos exemplos, incluindo a derivada em um ponto, como a velocidade instantânea de um corpo.

Na aula 2, você estudará a relação entre os conceitos de derivada e de continuidade de uma função real de variável real; e as principais propriedades da derivada, incluindo a regra da cadeia e a derivada da função inversa.

Na aula 3, você verá as definições de máximo e de mínimo, locais e absolutos de uma função real de variável real; uma condição necessária para que uma função tenha máximo ou mínimo relativo em um ponto, no qual a função é derivável; o teorema do valor médio; as regras de L'Hôpital, para o cálculo de limites e, por último, a fórmula de Taylor de uma função.

No decorrer de cada aula, você encontrará alguns exercícios, para fixação e avaliação da aprendizagem.

AULA 1 - Derivada de uma função real de variável real

Objetivos

- Calcular, usando a definição, derivadas de funções reais de variável real.
- Usar o conceito de derivada para calcular velocidade instantânea.
- Complementar sentenças de função, de modo a torná-la derivável.

Sejam I um intervalo aberto, uma função $f : I \to R$ e $a \in I$. A **derivada da função** f **no ponto** a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando esse limite existe. Nesse caso, dizemos que f é derivável no ponto a.

Quando existe a derivada $f'(x)$, em todos os pontos $x \in I$, dizemos que $f : I \to R$ é derivável no intervalo I. E, desse modo, temos uma nova função $f' : I \to R$, chamada função derivada de f ou **derivada primeira** de f. Quando f' é uma função contínua, dizemos que f é de classe C^1.

Denotaremos também a derivada de f no ponto a, como $Df(a)$ *ou* $\frac{df}{dx}(a)$. Quando $y = f(x)$, também serão usadas as notações y' *ou* $\frac{dy}{dx}$.

As noções de derivadas laterais, à direita e à esquerda, são introduzidas de modo análogo, por meio dos seguintes limites, respectivamente:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ e}$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando esses existem.

Observação 6.1

Uma função $f : I \to R$ é derivável em $x \in I$, se, e somente se, $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ existem e são iguais.

A partir da derivada primeira f', podemos considerar sua derivada, que é chamada a **derivada segunda** de f ou derivada de ordem 2 de f, que é indicada pelas notações $f'', D^2 f, \frac{d^2 f}{dx^2}$ *ou* $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Analogamente, podemos considerar derivada de ordem 3 de f, de ordem 4 e, assim, por diante.

A seguir, veremos o significado geométrico da derivada de uma função f em um ponto a.

Seja $f: I \to R$ uma função derivável em um intervalo I, que tenha, por exemplo, o gráfico como, a seguir, e considere a reta secante ao gráfico de f, passando pelos pontos $P=(a, f(a))$ e $Q=(x, f(x))$. Você já sabe que a inclinação dessa reta é dada por

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Fixado o ponto P, faça o ponto Q se aproximar de P, caminhando sobre a curva, como mostra a figura, a seguir. Observe que a inclinação da reta que passa por P e Q varia à medida que mudamos o ponto Q. Quando Q se aproxima de P, a reta secante ao gráfico de f, que passa por P e Q, se aproxima do que intuitivamente chamamos de reta tangente ao gráfico de f em P.

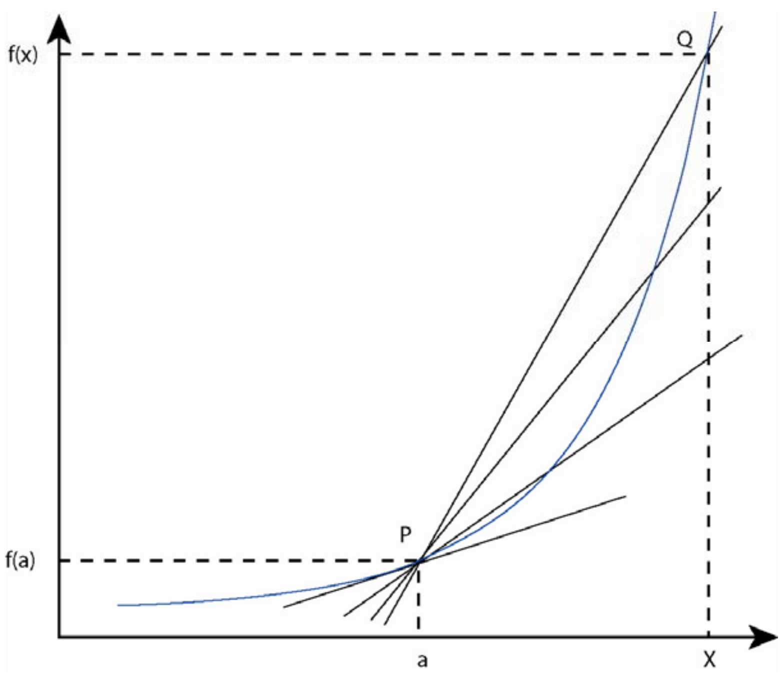

Figura 7: reta tangenta ao gráfico de uma função f em um ponto a

Definimos, então, a **reta tangente** ao gráfico de f, em um ponto a, como a reta que passa por P e tem inclinação dada pelo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Portanto, esse limite é, por um lado, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P = (a, f(a))$ e, por outro lado, é a derivada $f'(a)$, da função f, no ponto a. Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P = (a, f(a))$, é dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Ou seja,

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a).$$

Exemplos 6.2

1) Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então, a velocidade média no intervalo de tempo de t a $t + \Delta t$, como você já sabe, é definida pelo quociente

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Para obtermos a velocidade instantânea do corpo no instante t, calculamos sua velocidade média em intervalos de tempo Δt cada vez menores. A velocidade instantânea, ou velocidade no instante t, é o limite das velocidades médias, quando Δt se aproxima de zero, ou seja,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Esse limite é a derivada da função $s = s(t)$ no ponto t.

2) Seja $f : R \to R$, dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Para quais valores de x, a função f é derivável?

Pela definição de derivada em um ponto $x \in R$, temos que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}.$$

Fazendo a mudança de coordenada $x + h = t^3$ e $x = a^3$, teremos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \lim_{t \to a} \frac{t - a}{t^3 - a} = \lim_{t \to a} \frac{1}{t^2 + at + a^2} = \frac{1}{3a^2}.$$

Como $a = \sqrt[3]{x}$, temos que $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.Concluímos que o único ponto no qual a função f não é derivável, na reta real, é $x = 0$, embora sendo contínua nesse ponto.

3) Considere a função $f : R \to R$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x sen\dfrac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$$

Essa função é derivável em $x = 0$?

Sabemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 0} \frac{x sen\dfrac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} sen\frac{1}{x}.$$

Como esse último limite não existe, temos que a função f não é derivável em $x = 0$.

Exercícios 6.3

1) Considere a função $f : R \to R$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$$

Essa função é derivável em $x = 0$? Justifique sua resposta.

2) Seja $f : R \to R$, definida por $f(x) = |x|$

Calcule $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$. Para quais valores reais f é derivável? Justifique sua resposta.

3) Seja n um número inteiro positivo, e $f : R \to R$, definida por $f(x) = x^n$. Demonstre que $f'(x) = n.x^{n-1}$.

4) Um corpo se move em linha reta, de modo que sua posição no instante t é dada por

$$f(t) = 20t + t^2,\ 0 \leq t \leq 10.$$

Encontre a velocidade do corpo, no instante $t = 4$.

5) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} ax, & se\ x < 2, \\ ax^2 - bx + 3, & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

Encontre os valores das constantes a e b, para que a função dada seja derivável para todo valor real de x.

6) Encontre a equação da reta tangente à curva de equação $y = 2x^2 + x - 2$, que seja paralela à reta de equação $y = 2 - 3x$.

Aula 2 - Derivada e continuidade, operações com funções deriváveis

Objetivos

- Calcular a derivada da função potência com expoente racional.
- Calcular derivadas de "funções especias", usando os limites fundamentais.
- Usar a derivada da função inversa, para calcular a derivada da inversa da função seno.
- Demonstrar propriedades relativas à derivada de função periódica, de função par e de função ímpar.

O teorema, a seguir, estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma função seja derivável em um ponto.

Teorema 6.4

Seja I um intervalo aberto da reta. Uma função $f : I \to R$ é derivável em um ponto $a \in I$, se, e somente se, existir uma constante real c, tal que

$$a + h \in I \Rightarrow f(a+h) = f(a) + c.h + r(h), \text{em que } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

No caso em que a função f é derivável em a, temos que $c = f'(a)$.

Demonstração

$\Rightarrow$) Suponha que f seja derivável em a e seja $Y = \{h \in R; a + h \in I\}$. Desse modo, $0 \in Y \cap Y'$. Seja $r : Y \to R$, definida por $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a).h$. Então:

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

Portanto, $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, se existir uma constante real c, tal que

$$a + h \in I \Rightarrow f(a+h) = f(a) + c.h + r(h),$$

Em que $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, então:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c.h + r(h)}{h} = c + \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = c.$$

Portanto, f é derivável em a e $f'(a) = c$.

Observação 6.5

1) Do teorema anterior, temos como consequência a seguinte afirmação: se f é derivável em a, então, f é contínua em a.

De fato, se f é derivável em a, então,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}(f(a) + c.h + \frac{r(h)h}{h}) = f(a),$$

pois $f(a)$ e c são constantes e $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0$. Portanto, f é contínua em a.

2) A recíproca da afirmação, presente na observação 6.5(1), é falsa. Considere, por exemplo, a função f do exemplo 6.2(2) desta Unidade, com $a = 0$. Essa função é contínua em a, e não é derivável nesse ponto.

Teorema 6.6(Operações com funções deriváveis.)

Seja I um intervalo aberto da reta. Sejam f e g funções deriváveis num ponto $x \in I$. Então, as funções $f \pm g, f.g, f/g$ (caso $g(x) \neq 0$) e $\alpha.f$ (em que α é uma constante) são também deriváveis em x. Além disso,

1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

2) $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$;

3) $(\alpha.f(x))' = \alpha.f'(x)$;

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Demonstração

Exercício

O resultado, a seguir, é uma das principais propriedades da derivada e nos fornece uma maneira de derivar uma função composta.

Teorema 6.7. (Regra da cadeia)

Seja I um intervalo da reta real R. Consideremos uma função composta $f \circ g : I \to R$, de modo que $g(I)$ esteja contido no domínio de f. Suponha que g seja derivável em $x \in I$ e f derivável em $y = g(x)$. Então, a função composta $f(g(x))$ é derivável no ponto $x \in I$ e $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$.

Demonstração

Como f é derivável em y, pelo teorema 6.4,

$$\frac{f(y+k)-f(y)}{k} = f'(y)+\eta(k)$$

Em que $\eta(k) = \dfrac{r(k)}{k} \to 0$ quando $k \to 0$. Considerando $\eta(0)=0$, podemos escrever

$$f(y+k)-f(y) = k[f'(y)+\eta(k)],$$

que é verdadeira, mesmo quando $k=0$. Agora, seja $k = g(x+h)-g(x)$. Então,

$$\frac{f(g(x+h)-f(g(x))}{h} = \frac{f(y+k)-f(y)}{h} =$$

$$= \frac{[f'(y)+\eta(k)]k}{h} = [f'(g(x))+\eta(k)]\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

como g é contínua em $x \in I$, então, quando $h \to 0$, temos que $k \to 0$. Então, calculando o limite, quando $h \to 0$, segue a demonstração do teorema.

Exercício 6.8

Seja $\varphi:(0,+\infty)\to R$ a função definida por $\varphi(x)=x^{\frac{m}{n}}$, para todo $x\in(0,+\infty)$, em que m e n são inteiros positivos. Demonstre que $\varphi'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$.

Sugestão: considere $\varphi(x)=f(g(x))$, em que $f:R\to R$ é dada por $f(x)=x^m$ e $g:(0,+\infty)\to R$ é dada por $g(x)=x^{\frac{1}{n}}$.

A derivada da função g se encontra no exemplo 6.11.

O próximo resultado nos permite calcular a derivada da função inversa, em um determinado ponto, sem ter que calcular a função inversa.

Teorema 6.9. (Derivada da função inversa)

Seja I um intervalo aberto da reta, e $f:I\to R$ uma função bijetora e derivável em I, tal que $f'(x)\neq 0, \forall x\in I$. Então, a função inversa $f^{-1}:f(I)\to R$ é também derivável no intervalo aberto $f(I)$ e

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \forall y\in f(I).$$

Demonstração

Seja $d=f(c)\in f(I)$. Para qualquer $y=f(x)$, com $y\neq d$, considere a igualdade

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(d)}{y-d}=\frac{x-c}{f(x)-f(c)}=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}.$$

Como f é derivável em I e $f'(x)\neq 0, \forall x\in I$, passando o limite nesse quociente, quando y tende a d, concluiremos a demonstração.

Observação 6.10

A condição "$f'(x)\neq 0, \forall x\in I$" é essencial para a validade do teorema. De fato, seja $f(x)=x^3, \forall x\in R$. Essa função é bijetora e derivável em R; entretanto $f'(x)=3x^2$ é zero para $x=0$. A função inversa f^{-1} é definida por $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$, a qual não é derivável em $y=0$, como 6.2(2).

Exemplo 6.11

Sejam n um número inteiro positivo e $g:(0,+\infty)\to R$, definida por

$$g(y)=\sqrt[n]{y}, \forall y\in(0,+\infty).$$

A função g é a inversa da função $f:(0,+\infty)\to R$, definida por $f(x)=x^n$. Como f é bijetora e derivável em $(0,+\infty)$; além disso, $f'(x)=nx^{n-1}\neq 0, \forall x\in(0,+\infty)$. Pelo teorema 6.9, g é derivável e

$$g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}=\frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}},$$

Ou seja,

$$g'(y)=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exercícios 6.12

1) Admitindo os limites fundamentais:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen x}{x}=1\,;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ (a>0,\ a\neq 1)\,;\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,,$$

demonstre que

A) se $f(x)=a^x,(a>0,\ a\neq 1)$, então, $f'(x)=a^x\ln a,(a>0,\ a\neq 1)$;

B) se $f(x)=\log_a x,(a>0,\ a\neq 1)$, então, $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e,(a>0,\ a\neq 1)$;

C) se $u(x)$ é uma função derivável e $f(x)=a^{u(x)},(a>0,\ a\neq 1)$, então,

$$f'(x)=a^{u(x)}u'(x)\ln a,(a>0,\ a\neq 1)\,;$$

D) se $u(x)$ é uma função derivável, com $u(x)>0,\ \forall x$ e $f(x)=\log_a u(x),(a>0,\ a\neq 1)$, então, $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}\log_a e,(a>0,\ a\neq 1)$;

E) se $f(x)=sen\,x$, então, $f'(x)=\cos x$;

F) se $f(x)=\cos x$, então, $f'(x)=-sen\ x$;

G) se $u(x)$ é uma função derivável e $f(x)=sen[u(x)]$, então, $f'(x)=u'(x)\cos[u(x)]$;

H) se $u(x)$ é uma função derivável e $f(x)=\cos[u(x)]$, então, $f'(x)=-u'(x)sen[u(x)]$.

2) Seja $f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ a função definida por $f(x)=arcsen\,x$. Então, $y=f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) Seja $f:R\to R$ uma função derivável e periódica. Demonstre que a derivada $f':R\to R$ é também uma função periódica.

4) Seja $f:R\to R$ uma função par (isto é, $f(x)=f(-x),\forall x\in R$), derivável. Demonstre que a derivada $f':R\to R$ é uma função ímpar.

5) Seja $f:R\to R$ uma função ímpar (isto é, $f(-x)=-f(x),\forall x\in R$), derivável. Demonstre que a derivada $f':R\to R$ é uma função par.

Aula 3 – Máximos e mínimos de funções reais de variável real, teoremas sobre derivadas, regras de L'Hôpital, fórmula de Taylor

Objetivos

- Resolver problema de máximo e mínimo de função real de variável real.
- Demonstrar propriedades relativas a funções crescentes e decrescentes, a partir da derivada da função.
- Fazer aplicações do teorema do valor médio.
- Determinar a fórmula de Taylor de uma função em torno de um ponto.
- Usar o polinômio de Taylor, para aproximar o valor de uma função em um determinado ponto e estimar o erro proveniente dessa aproximação.

Máximos e mínimos

Dizemos que uma função $f : D \rightarrow R$ tem um **máximo local** no ponto $a \in D$, quando existe $\delta > 0$, tal que $x \in D, |x - a| < \delta$ implicam $f(x) \leq f(a)$. Quando $x \in D, |x - a| < \delta$ implicam $f(x) < f(a)$, dizemos que f tem um máximo local estrito no ponto $a \in D$.

Analogamente, dizemos que $f : D \to R$ tem um **mínimo local** no ponto $a \in D$, quando existe $\delta > 0$, tal que $x \in D, |x-a| < \delta$ implicam $f(x) \geq f(a)$ e quando $x \in D, |x-a| < \delta$ implicam $f(x) > f(a)$, dizemos que f tem um mínimo local estrito no ponto $a \in D$.

Dizemos que uma função $f : D \to R$ tem um **máximo absoluto** no ponto $a \in D$, quando $f(x) \leq f(a), \forall x \in D$. Analogamente, $a \in D$ é ponto de **mínimo absoluto** de $f : D \to R$, quando $f(x) \geq f(a), \forall x \in D$.

Teorema 6.13

Seja I um intervalo aberto da reta e $f : I \to R$ uma função derivável em $x = c$, que é ponto de máximo ou mínimo local, então, $f'(c) = 0$.

Demonstração

Suponha que c seja ponto de máximo local de f, então, existe $\delta > 0$, tal que $|h| < \delta$ implica $f(c+h) - f(c) \leq 0$. Então,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0,\ se\ h > 0 \text{ e } \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0,\ se\ h < 0.$$

Como f é uma função derivável em $x = c$, fazendo o limite, nessas razões incrementais, segue a demonstração do teorema.

Teorema 6.14 (Rolle)

Seja $f:[a,b]\to R$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), com $f(a)=f(b)=0$. Então, existe $c\in(a,b)$, tal que $f'(c)=0$.

Demonstração

Pelo teorema 5.29, da Unidade 5, f assume seu valor máximo M e seu valor mínimo m em $[a,b]$. Se esses valores são assumidos em a e b, então, $m = M$ e a função f é constante; portanto, $f'(x)=0, \forall x\in(a,b)$. Se um desses pontos (de máximo ou de mínimo), que podemos denotar por c, estiver em (a,b), pelo teorema 6.13, $f'(c)=0$. No caso da função mostrada na figura, a seguir, temos dois valores de c, para os quais $f'(c)=0$.

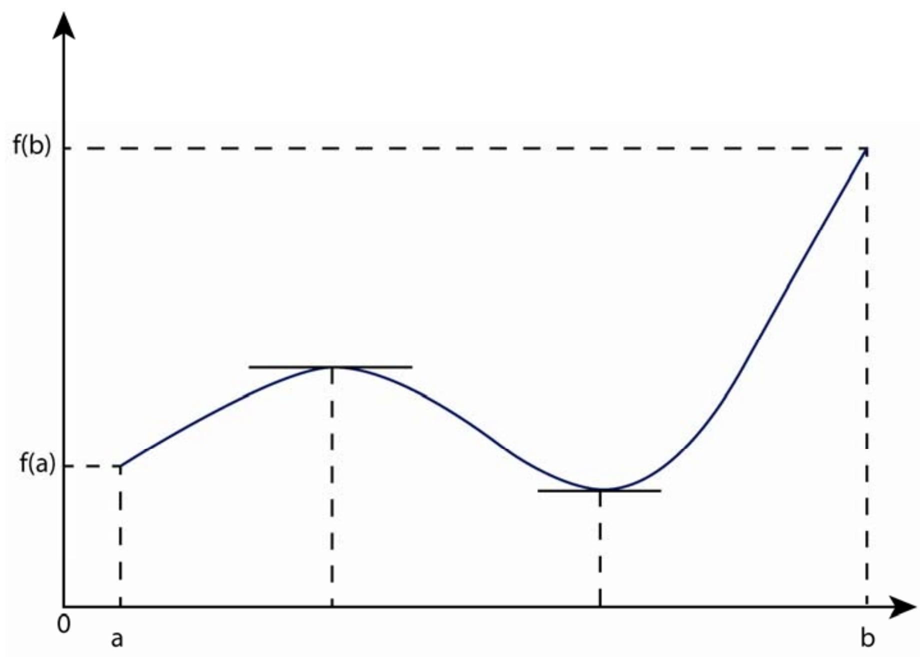

Figura 8: reta tangente horizontal

Teorema 6.15 (do Valor Médio, de Lagrange)

Seja $f:[a,b]\to R$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então, existe $c\in(a,b)$, tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstração

Seja $g:[a,b]\to R$, definida por

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

A função g é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), além disso, $g(a)=g(b)=0$, pelo teorema de Rolle, existe $c\in(a,b)$, tal que $g'(c)=0$. Portanto, segue a demonstração do teorema.

Na figura, a seguir, temos dois valores de c, para os quais $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

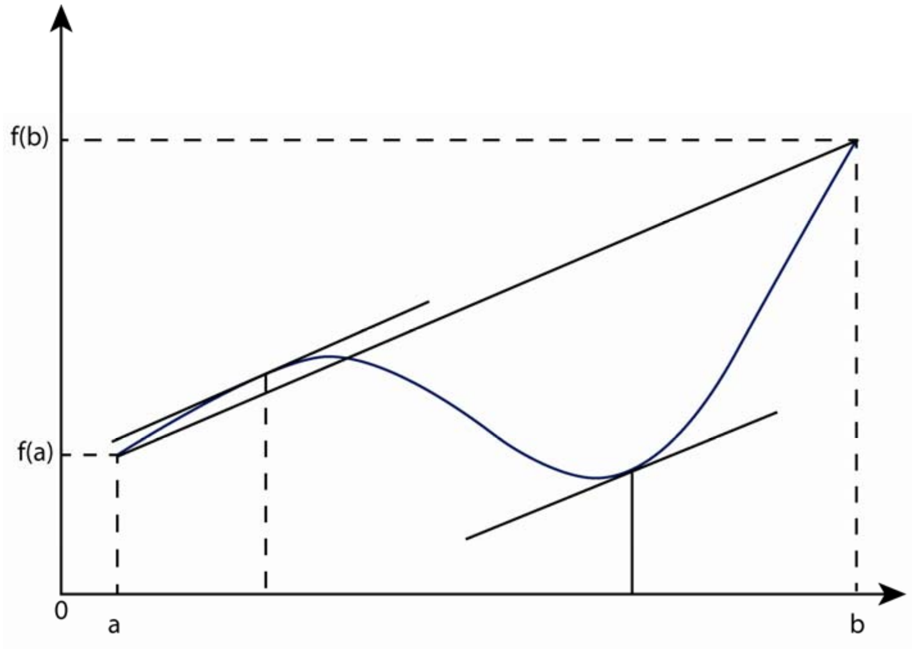

Figura 9: retas tangentes paralelas à reta que passa pelas extremidades

O teorema que você verá, a seguir, será fundamental para demonstrar as regras de L'Hôpital.

Teorema 6.16 (Fórmula de Cauchy)

Se f e g são funções contínuas em $[a,b]$, deriváveis em (a,b), com $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, então, existe $z \in (a,b)$, tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}. \qquad (6.1)$$

Demonstração

Como g é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), pelo teorema do valor médio, existe $c \in (a,b)$, tal que $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$. Como $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, segue que $g'(c) \neq 0$ e, então, $g(b)-g(a) \neq 0$. Agora, consideremos a função $h:[a,b] \to R$, definida por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right][g(x)-g(a)].$$

A função h satisfaz a hipótese do teorema de Rolle. Daí, segue que existe $z \in (a,b)$, tal que $h'(x) = 0$. Dessa igualdade, obteremos (6.1).

Teorema 6.17 (Regras de L'Hôpital)

Sejam $f \ e \ g$ funções deriváveis em um intervalo (a,b), exceto, possivelmente, em $c \in (a,b)$. Suponha que $g(x) \neq 0 \ e \ g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b), x \neq c$ e que uma das possibilidades ocorra:

C) $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, ou

ii) $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$.

Então, se $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, temos que $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demonstração

D) Sejam $F, G : (a,b) \to R$, definidas por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), se \ x \neq c, \\ 0, se \ x = c \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), se \ x \neq c, \\ 0, se \ x = c \end{cases}.$$

Então, $\lim_{x \to c} F(x) = \lim_{x \to c} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to c} G(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$. Portanto, $F \ e \ G$ são contínuas em $x = c$ e, desse modo, são contínuas em (a,b). Seja $x \in (a,b), x \neq c$. As funções $F \ e \ G$ satisfazem as hipóteses do teorema 6.16, no intervalo $[x,c]$ ou $[c,x]$. Então, existe z entre $c \ e \ x$, tal que

$$\frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}, \text{ ou seja, } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Como z encontra-se entre $c \ e \ x$, quando x tende a c, então, z tende a c. Desse modo, temos que $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{f(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} = L$.

ii) Exercício.

Observação 6.18

1) Em (ii), os limites podem ser $+\infty$ ou $-\infty$.

2) Se $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, então, $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Estamos incluindo os casos $+\infty$ ou $-\infty$.

E) As regras de L'Hôpital são também válidas para os limites laterais e para os limites no infinito.

Exemplo 6.19

Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}$.

Considerando $f(x) = sen\,x$ e $g(x) = x$, segue que $f'(x) = sen\,x \; e \; g'(x) = 1$. Como $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$, pela regra de L'Hôpital, segue que $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$

Exemplo 6.20

Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, em que $a>0\; e\; a\neq 1$.

Considerando $f(x)=a^x-1$ e $g(x)=x$, segue que $f'(x)=\ln a\; e\; g'(x)=1$. Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a}{1}=\ln a$, pela regra de L'Hôpital, segue que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}=\ln a$.

Exercícios 6.21

Calcule os seguintes limites:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-sen\,x}{x^2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{a^x-1}$, em que $a>0\; e\; a\neq 1$.

Fórmula de Taylor

No resultado, a seguir, introduziremos a fórmula de Taylor, que consiste em um método para aproximarmos uma função por um polinômio, com um erro possível de ser calculado.

Diremos que uma função $f:[a,b]\to R$ é derivável em $[a,b]$, quando ela é derivável no intervalo aberto (a,b) e as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$ existirem. Pela observação 6.5(1), se $f:[a,b]\to R$ é derivável em $[a,b]$, então, é continua nesse intervalo.

Teorema 6.22 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)

Seja $f:[a,b]\to R$ uma função, tal que as derivadas $f', f'', f''', \cdots f^{(n)}$ existam e sejam contínuas em $[a,b]$ e que $f^{(n+1)}$ exista em (a,b). Seja $c\in[a,b]$, fixado. Então, para cada $x\in[a,b], x\neq c$, existe um ponto ξ entre x e c, tal que

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2!}f''(x)(x-c)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n+R_{n+1}, \quad (6.2)$$

Em que

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1} \qquad (6.3)$$

Observações 6.23

1) Quando $n=0$, temos o teorema do valor médio no intervalo $[x,c]$ ou $[c,x]$.

2) Se escrevermos

$$p_n(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2!}f''(x)(x-c)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n, \quad (6.4),$$

o teorema 6.22 nos diz que $f(x)$ difere do polinômio por R_{n+1}. O polinômio em (6.4) é chamado polinômio de Taylor de grau n. E a fórmula (6.2) com R_{n+1}, calculado pela equação (6.3), é chamada fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

Exemplo 6.24

Seja $f(x)=e^x,\ x\in R$. Então, $f^{(n)}(x)=e^x,\ \forall n\in N$. Se $c=0$, então,

$$p_n(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n \text{ e } R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1}$$

Então, pelo teorema 6.22,

$$e^x-P_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1}.$$

Se $|x|<1$, então, $\left|e^x-P_n(x)\right|\le\frac{e}{(1+n)!}$. Ou seja, quando $|x|<1$, o polinômio $P_n(x)$ é uma aproximação para e^x, com um erro inferior a $\frac{e}{(1+n)!}$. E, portanto, quanto maior for o valor de n, melhor será a aproximação.

Um ponto c em que $f'(c)=0$ é chamado ponto crítico de f. Um ponto crítico c é chamado de inflexão horizontal de f, se existir $\varepsilon>0$, tal que

$$f(x)<f(c),\ \text{para}\ c-\varepsilon<x<c,\ e\ f(x)>f(c),\ \text{para}\ c<x<c+\varepsilon,$$

ou

$$f(x)>f(c),\ \text{para}\ c-\varepsilon<x<c,\ e\ f(x)<f(c),\ \text{para}\ c<x<c+\varepsilon.$$

O resultado, a seguir, estabelece um método, para sabermos se um dado ponto crítico é de máximo ou de mínimo local. Não demonstraremos esse resultado, neste texto.

Teorema 6.25

Seja $f:(a,b) \to R$ uma função derivável n vezes e cujas derivadas $f', f'', f''', \cdots f^{(n)}$ existam e sejam contínuas em (a,b). Seja $c \in (a,b)$, tal que $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$. Então, se n é par, temos que $f^{(n)}(c) > 0$ implica que c é ponto de mínimo local de f e, quando $f^{(n)}(c) < 0$, temos que c é ponto de máximo local de f. Se n é ímpar, então, c é um ponto de inflexão horizontal.

Exercícios 6.26

1) Um fio de comprimento L deverá ser cortado em dois pedaços, de modo que, com um dos pedaços, você deverá fazer um círculo e, com o outro, um quadrado. Como devemos cortar esse fio, para que a soma das duas áreas seja mínima? E para que a soma seja máxima?

2) Usando o teorema do valor médio, demonstre que

A) $|sen\,\alpha - sen\,\beta| \leq |\alpha - \beta|, \forall \alpha, \beta \in R$,

B) $sen\,\alpha \leq \alpha, \forall \alpha \geq 0$.

3) Seja $f:(a,b)\to R$ uma função derivável no intervalo (a,b). Demonstre que

A) se $f'(x)>0,\ \forall x\in(a,b)$, então, f é crescente (estritamente) em (a,b);

B) se $f'(x)<0,\ \forall x\in(a,b)$, então, f é decrescente (estritamente) em (a,b).

4) Seja $f:[a,b]\to R$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável no intervalo (a,b), exceto, possivelmente, em um ponto $c\in(a,b)$. Demonstre que

A) se $f'(x)>0,\ \forall x\in(a,b), x<c$ e $f'(x)<0,\ \forall x\in(a,b), x>c$, então, f tem máximo local em c;

B) se $f'(x)<0,\ \forall x\in(a,b), x<c$ e $f'(x)>0,\ \forall x\in(a,b), x>c$, então, f tem mínimo local em c.

5) Seja $f:R\to R$ uma função par (isto é, $f(x)=f(-x), \forall x\in R$). Mostre que na expressão da fórmula de Taylor, em torno de $c=0$, não aparecem as derivadas de ordens ímpares. E quando a função for ímpar (isto é, $f(-x)=-f(-x), \forall x\in R$), não aparecem as derivadas de ordens pares.

6) Determinar os polinômios de Taylor de grau 2 e de grau 4 da função, $f(x)=senx$, no ponto $c=0$. Use o polinômio $P_4(x)$ para encontrar um valor aproximado para $sen\dfrac{\pi}{6}$ e faça uma estimativa para o erro.

unidade 7

INTEGRAL DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Objetivos

- Calcular soma superior e soma inferior de uma determinada função, referente a uma partição.
- Verificar se uma determinada função é ou não integrável a Riemann.
- Verificar se uma determinada função é integrável a Riemann, usando um critério de integrabilidade.
- Demonstrar propriedades de funções integráveis.
- Demonstrar que determinada função definida, a partir de uma integral, é contínua.
- Calcular integrais definidas, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e integração por partes.
- Demonstrar teoremas do valor médio para integrais.

Introdução

Nesta Unidade, você estudará, de modo mais detalhado, a Integral de Riemann, conceito que, certamente, conheceu quando cursou a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral; entretanto, nesta oportunidade, você verá detalhes relacionados a esse conceito, que, geralmente, não são abordados no curso de cálculo integral. Mais especificamente, responderemos às seguintes perguntas:

1. Qual é a definição de integral de Riemann de uma função $f:[a,b] \to R$?

2. Toda função $f:[a,b] \to R$ contínua é integrável a Riemann?

3. Como calcular a área da região limitada pelo gráfico de uma função contínua $f \geq 0$,

pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$?

4. Que relação existe entre a integral de Riemann de uma função $f:[a,b] \to R$ e a derivada dessa função?

Nesta Unidade, você verá que a integral de uma função contínua $f:[a,b] \to R$ positiva está relacionada à área da região mencionada na terceira pergunta acima.

A ideia de integral como área de uma figura plana surgiu com Arquimedes (285 a.C.-212 a.C.), na Antiguidade, sendo bem mais antiga que o conceito de derivada, surgida no século XVII.

Você sabe como calcular a área de um círculo de raio R? E como justificar esse cálculo?

O cálculo da área do círculo preocupou os matemáticos, desde a Antiguidade. Por exemplo, Arquimedes demonstrou que a área A do círculo de raio R é igual à área de um triângulo, que tem como base o comprimento C da circunferência do círculo e como altura R. Dessa propriedade, segue que a razão entre a área A e a área do quadrado de lado R é igual à razão entre C e o diâmetro do círculo; de fato,

$$\frac{A}{R^2} = \frac{\frac{1}{2}CR}{R^2} = \frac{C}{2R}.$$

Usando o resultado de Eudoxo (390 a.C.–338 a.C.), que aparece nos elementos de Euclides, por volta do ano 300 a.C., "a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados de seus raios", Arquimedes concluiu que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo é constante. Essa constante é a que hoje conhecemos como π. Portanto, da equação acima, obtemos as fórmulas para a área e para o comprimento do círculo de raio R, que são $A = \pi R^2$ e $C = 2\pi R$, respectivamente.

Calculando os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos de 96 lados, e considerando que C está entre esses dois valores, Arquimedes obteve a seguinte estimativa para o valor de π :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Tanto na demonstração do resultado de Euclides, enunciado anteriormente, como no cálculo aproximado de π, feito por Arquimedes, usou-se a ideia de considerar o círculo como limite de polígonos regulares de lados cada vez menores. Isso constitui o que os gregos chamavam de método da exaustão, porque a sucessão dos polígonos, de certo modo, exaure o círculo.

De modo um pouco mais detalhado, o método da exaustão consistia no seguinte: se F é uma figura plana e P_n é uma sucessão crescente (isto é, P_{n+1} contém P_n) de figuras planas que "tendem" para F, então, as áreas de P_n convergem para a área de F. A essência do método da exaustão é o uso dessa propriedade. E é essa também a essência do cálculo integral, formalizada por Newton e Leibniz, no século XVII.

Seguindo a ideia de aproximar figuras planas por retângulos, nesta Unidade, resolveremos o seguinte problema:

Calcular a área A da região limitada pelo gráfico de uma função contínua f, $f \geq 0$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$, como, por exemplo, a região apresentada na figura, a seguir:

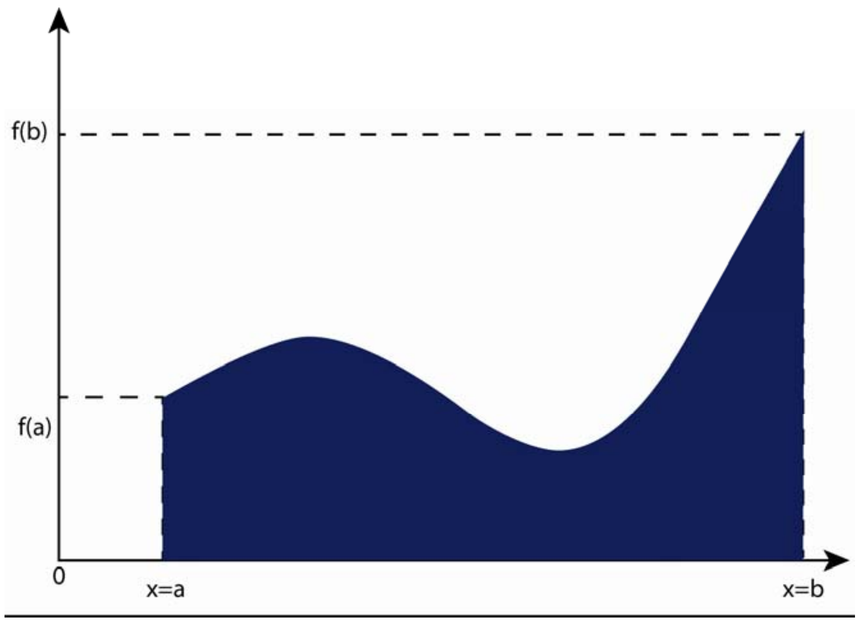

Figura 10: área de uma região limitada pelo gráfico de uma função, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$

Esta Unidade está dividida em 3 aulas, que deverão ser estudadas em 7 dias, já incluída a entrega das tarefas, e versará sobre os seguintes conteúdos:

Aula 1: Soma inferior e soma superior.

Aula 2: Critério de integrabilidade, propriedades da integral e a integral como somas de Riemann.

Aula 3: Teorema Fundamental do Cálculo, mudança de variáveis e integração por partes.

Na aula 1, inicialmente, serão introduzidas as definições de partição de um intervalo fechado, de soma inferior e de soma superior. Em seguida, serão estudadas propriedades relacionadas a essas somas. E, por fim, a definição de função integrável em um intervalo fechado.

Na aula 2, inicialmente, será estudado um critério de integrabilidade, a partir das somas inferior e superior; você verá as demonstrações de que tanto as funções contínuas, quanto as funções monótonas, definidas em um intervalo fechado, são integráveis; em seguida, verá a definição de conjunto de medida nula, inclusive, um critério de integrabilidade relacionado com esse conceito e, por último, verá propriedades de funções integráveis.

Na aula 3, você verá alguns resultados que precedem o teorema fundamental do cálculo; em seguida, o próprio teorema; as definições de integral definida e de integral indefinida de uma função e, por fim, os teoremas de mudança de variáveis e de integração por partes.

No decorrer de cada aula, você encontrará alguns exercícios para fixação e avaliação da aprendizagem.

Objetivos

- Calcular soma superior e soma inferior de uma função real de variável real, referente a uma partição.
- Verificar se uma determinada função é ou não integrável a Riemann.

Apresentaremos, a seguir, as definições de partição de um intervalo $I = [a,b]$, de soma superior e soma inferior de uma função f, relativa a uma partição.

Uma **partição** de $I = [a,b]$ é um conjunto finito de pontos dados por

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, com\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b. \qquad (7.1)$$

Notação: escreveremos $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ para indicar uma partição de um intervalo $[a,b]$, entendendo que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Dizemos que uma partição P' é um refinamento de P, ou que P' refina P, se $P \subset P'$, isto é, todos os pontos de P estão em P'.

Dada a partição P em (7.1), o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é chamado o $i-ésimo$ subintervalo de P.

Seja $f:[a,b]\to R$ uma função limitada. E sejam $m_i \; e \; M_i$ o ínfimo e o supremo de f, respectivamente, no $i-ésimo$ subintervalo de P. Isto é,

$$m_i = \inf\{f(x)\,;\, x_{i-1} \le x \le x_i\} \text{ e } M_i = \sup\{f(x)\,;\, x_{i-1} \le x \le x_i\}.$$

Consideremos, também, $\omega_i = M_i - m_i$, que é chamada a oscilação da função f nesse subintervalo.

A **soma inferior** da função f referente à partição P, denotada por $s(f,P)$, é dada por

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad (7.2)$$

A **soma superior** da função f referente à partição P, denotada por $S(f,P)$, é dada por

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad (7.3)$$

Observação 7.1

Sejam $m \; e \; M$ o ínfimo e o supremo de f no intervalo I. Como $m \le m_i \le M_i \le M$, então:

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a). \qquad (7.4)$$

De fato,

$$m(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1}),$$

então:

$$m\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M\sum(x_i - x_{i-1}).$$

Quando f é uma função contínua e positiva em todo o intervalo I, cada soma inferior é um valor aproximado, por falta do que entendemos por área da figura geométrica delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Analogamente, cada soma superior é um valor aproximado, por excesso da mesma área.

Nas figuras, a seguir, apresentaremos as aproximações por falta e por excesso, respectivamente, da região mostrada na figura anterior.

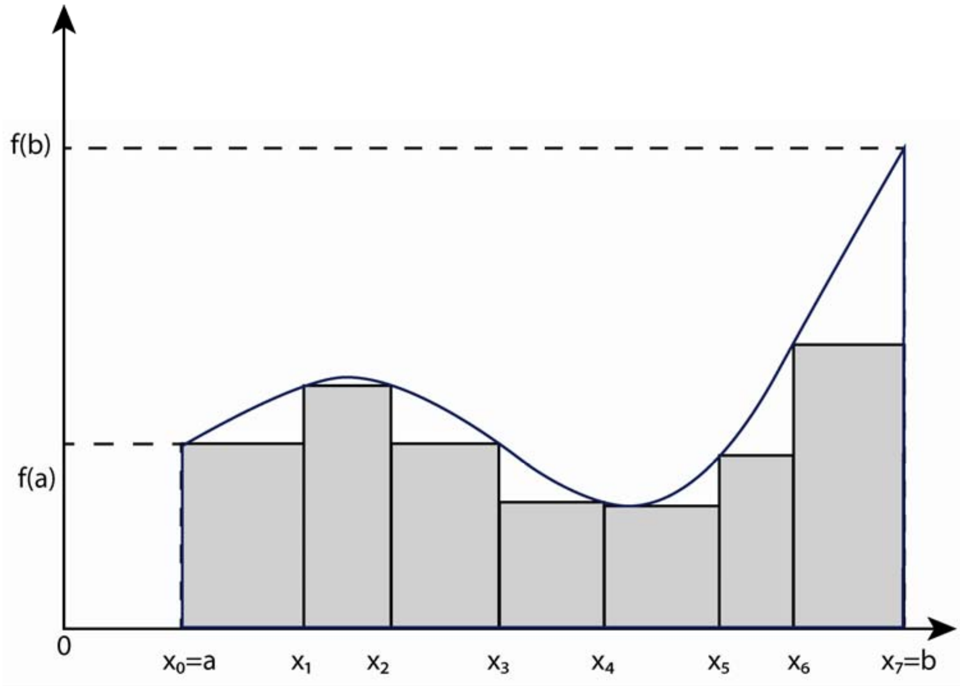

Figura 11: aproximação da área da região por falta

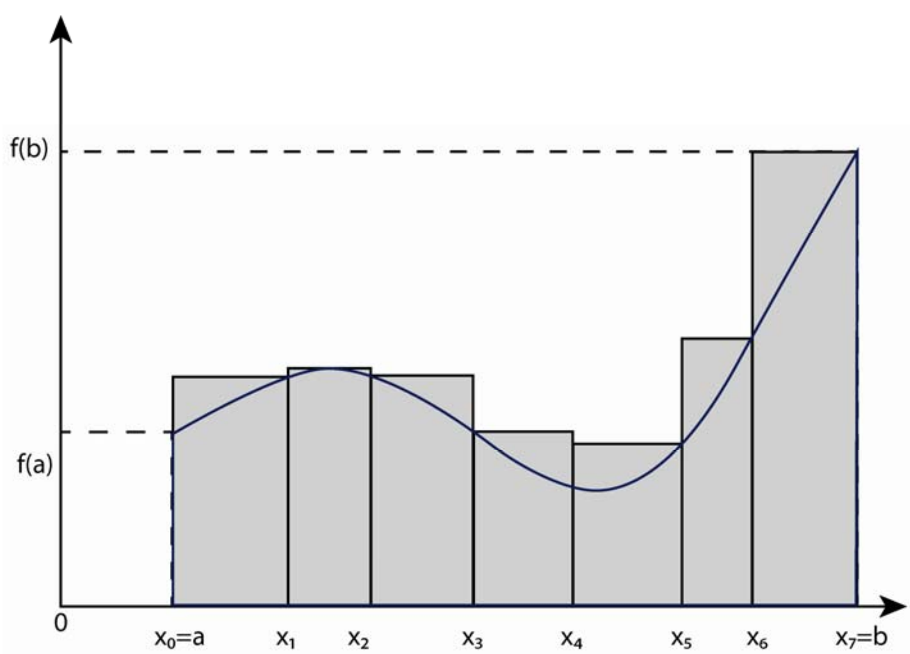

Figura 12: aproximação da área da região por excesso

Mostraremos que, no caso de a função f ser contínua, não necessariamente positiva, o supremo do conjunto das somas inferiores é igual ao ínfimo do conjunto das somas superiores; e esse valor comum, supremo e ínfimo, é definido como a **integral** da função f no intervalo I.

Veremos, também, que esse conceito se estende a uma classe mais ampla do que a das funções contínuas, que é a classe das funções integráveis.

O resultado, a seguir, estabelece que, quando refinamos uma partição, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

Teorema 7.2

Sejam $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ uma partição qualquer do intervalo $[a,b]$ e P' um refinamento de P. Então:

$$s(f,P)\le s(f,P') \qquad \text{e} \qquad S(f,P')\le S(f,P).$$

Demonstração

Suponha que $P'=P\cup\{x'\}$, $x'\in[x_{i-1},x_i]$, M' seja o supremo de f, em $[x_{i-1},x']$ e M_i'' seja o supremo de f, em $[x',x_i]$. Então, da equação (7.3), temos:

$$S(f,P)=M_1(x_1-x_0)+\ldots+M_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})+M_i(x_i-x_{i-1})+M_{i+1}(x_{i+1}-x_i)+\ldots+M_n(x_n-x_{n-1}),$$

ou seja,

$$S(f,P') = M_1(x_1 - x_0) + \cdots + M_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2}) + M_i'(x' - x_{i-1}) +$$
$$+ M_i''(x_i - x') + M_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1}).$$

Como

$$x_i - x_{i-1} = x' - x_{i-1} + x_i - x',\ M_i' \le M_i,\ M_i'' \le M_i,$$

então:

$$S(f,P) - S(f,P') = M_i(x_i - x_{i-1}) - [M_i'(x' - x_{i-1}) + M_i''(x_i - x')] \ge 0.$$

Quando P' tiver mais do que um ponto a mais que P, trataremos do mesmo modo, aplicando repetidamente um ponto de cada vez. O procedimento para as somas inferiores é análogo.

Corolário 7.3

Sejam P e P' partições quaisquer de $I = [a,b]$. Então, $s(f,P) \le S(f,P')$.

Demonstração

Considere $P'' = P \cup P'$. Como $P \subset P''$, pelo teorema anterior, $s(f,P) \le s(f,P'')$. Analogamente, $P' \subset P''$; então, pelo teorema, $S(f,P'') \le S(f,P')$.

Observação 7.4

Da desigualdade (7.4), temos que o conjunto das somas inferiores é limitado superiormente por $M(b-a)$; portanto, tem supremo finito, denotado por $\underline{\int_a^b} f$.

Analogamente, da mesma desigualdade, temos que o conjunto das somas superiores é limitado inferiormente por $m(b-a)$; logo, tem ínfimo finito, denotado por $\overline{\int_a^b} f$.

O supremo e o ínfimo da observação anterior são chamados, respectivamente, a **integral inferior** e a **integral superior** da função f no intervalo [a,b].

A seguir, apresentaremos, sem demonstração, um resultado relativo a supremo e ínfimo de um conjunto, visto na Unidade 1, e que será utilizado em seguida.

Lema 7.5

Sejam $A, B \subset R$, tal que $a \leq b, \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$, então:

i) $\sup A \leq \inf B$;

ii) $\sup A = \inf B$, se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existem $a \in A, b \in B$, tais que $b - a < \varepsilon$.

Observação 7.6

Seja $f:[a,b] \to R$, limitada, então, $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

De fato, considere os conjuntos:

$$A = \{s(f,P);\, P \text{ é partição de } [a,b]\} \qquad (7.5)$$

$$B = \{S(f,P');\, P' \text{ é partição de } [a,b]\} \qquad (7.6)$$

Do corolário 7.3 e do Lema 7.5, segue o resultado.

Seja $f:[a,b] \to R$ uma função limitada. Dizemos que f é **integrável ou integrável a Riemann** em [a,b], quando $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Nesse caso, esse valor comum é chamado a **integral da função** f **no intervalo [a,b]** e é denotada por $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$.

Seja $f:[a,b] \to R,\ f(x) \geq 0$ uma função integrável. A **área da região** plana, identificada com o conjunto

$$\{(x,y) \in R^2;\, 0 \leq y \leq f(x),\, a \leq x \leq b\},$$

é definida como a integral de f no intervalo $[a,b]$. Essa é a resposta da terceira pergunta feita no início desta Unidade.

Exercício 7.7

Seja $f:[a,b]\to R$ a função de Dirichlet, definida por

$$f(x)=\begin{cases}0, & se\ x\ é\ racional\\ 1, & se\ x\ é\ irracional\end{cases}.$$

A função f é integrável? Justifique sua resposta.

Exercício 7.8

Seja $f:[a,b]\to R$ a função constante definida por $f(x)=c, \forall x\in[a,b]$. Calcule $\underline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} f$; verifique que f é integrável e $\int_a^b f = c(b-a)$.

Aula 2 - Critério de integrabilidade, propriedades da integral e a integral como somas de Riemann.

Objetivos

- Verificar se uma função é integrável a Riemann, usando um critério de integrabilidade.

- Demonstrar propriedades de funções integráveis.

Critérios de Integrabilidade

Lema 7.9

Uma função $f:[a,b]\to R$ é integrável, se, e somente se, dado $\varepsilon>0$, existem partições $P'\ e\ P''\ de\,[a,b]$, tais que $S(f,P')-s(f,P'')<\varepsilon$.

Demonstração

$\Rightarrow$) Dado $\varepsilon>0$, em virtude da definição de supremo e de ínfimo (vistos na Unidade 1) dos conjuntos A e B, da observação 7.6, respectivamente, existem partições $P'\ e\ P''\ de\,[a,b]$, tais que

$$S(f,P')<\int_a^b f+\frac{\varepsilon}{2}\ \ e\ \ s(f,P'')>\int_a^b f-\frac{\varepsilon}{2}$$

Então, $S(f,P')-s(f,P'')<\varepsilon$.

$\Leftarrow$) Sejam A e B os conjuntos definidos em (7.5) e (7.6). É claro que $\sup A\le\inf B$.

Suponha que $\sup A<\inf B$, então, $\varepsilon=\inf\ B-\sup\ A>0$; logo, $S(f,P)-s(f,P')\ge\varepsilon$ para toda partição $P\ e\ P'$ de $[a,b]$, que é uma contradição.

O resultado, a seguir, estabelece uma condição necessária e suficiente, para que uma função seja integrável em um intervalo fechado.

Teorema 7.10

Uma função $f:[a,b]\to R$ é integrável, se, e somente se, dado $\varepsilon>0$, existe uma partição $P\ de\ [a,b]$, tal que $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$.

Demonstração

$\Rightarrow$) Sejam f integrável $P'\ e\ P''$, dados pelo lema 7.9. Consideremos $P=P'\cup P''$, então:

$$S(f,P)\le S(f,P')\ \ e\ \ s(f,P)\ge s(f,P'').$$

Do lema 7.9, segue o resultado.

$\Leftarrow$) Seja $P'=P''=P$. Do lema 7.9, segue o resultado.

Exemplo 7.11

Seja $f:[a,b]\to R$, definida por $f(x)=c$, quando $a<x\le b$ e $f(a)=A$. Então, f é integrável e $\int_a^b f=c(b-a)$.

De fato, suponha que $c<A$ e, $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ seja uma partição qualquer de [a,b]. Então, $m_1=c, M_1=A\ e\ m_i=M_i=c\ para\ 1<i\le n.$ Portanto,

$$S(f,P)-s(f,P)=(A-c)(t_1-t_0).$$

Então, dado $\varepsilon>0$, tomamos uma partição P, tal que $t_1-t_0<\dfrac{\varepsilon}{A-c}$. Assim, $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$. Logo, f é integrável. Como $s(f,P)=c(b-a)$ para toda partição P, temos que $\underline{\int_a^b} f = c(b-a)$, portanto, da integrabilidade de f, temos que $\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = c(b-a)$. O caso $c > A$ é análogo.

Teorema 7.12

Toda função contínua $f:[a,b] \to R$ é integrável.

Demonstração

Como f é contínua e [a,b] é um conjunto compacto, então, pelo teorema 5.33, segue que f é uniformemente contínua, logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $x, y \in [a,b], |x-y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Consideremos uma partição $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de [a,b], tal que todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tenham comprimento menor do que δ. Nesse subintervalo, a função f assume um máximo M_i em algum ponto $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$, e um mínimo em algum ponto $x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$. Então,

$$0 \leq M_i - m_i = f(x_i') - f(x_i'') < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Portanto, das equações (7.2) e (7.3), segue que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Pelo teorema 7.10, f é integrável.

Teorema 7.13

Toda função monótona $f:[a,b] \to R$ é integrável.

Demonstração

Suponhamos que f seja não decrescente. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos uma partição $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de [a,b], de modo que todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tenham comprimento menor do que $\dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Estamos supondo que $f(b) > f(a)$, pois, caso contrário, ela seria constante e, portanto, integrável. Como f é não decrescente, então, $m_i = f(x_{i-1})$ e $M_i = f(x_i)$, para $i = 1, \cdots, n$. Portanto, das equações (7.2) e (7.3), segue que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{i=n} (M_i - m_i) = \varepsilon$$

Pelo teorema 7.10, f é integrável. Caso f seja não crescente, então, $-f$ é não decrescente e, pelo resultado demonstrado, $-f$ é integrável e, consequentemente, $f = -(-f)$ é integrável.

Se $a < b$, indicaremos com $|I| = b - a$ o comprimento do intervalo (fechado, aberto ou semiaberto) I = [a,b]. Dizemos que o conjunto $X \subset R$ tem **medida nula,** quando, dado $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura finita ou infinita enumerável $X \subset \cup I_k$ de X, por intervalos abertos I_k, cujas somas dos comprimentos é $\sum |I_k| < \varepsilon$.

Exemplo 7.14

Todo conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, ... x_k, ...\}$ tem medida nula. De fato, seja $I_k = (x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}})$, $X \subset \cup I_k$ e $\sum |I_k| < \varepsilon$. Em particular, o conjunto dos números racionais tem medida nula.

O resultado, a seguir, estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma função definida, em um intervalo fechado, seja integrável, em função dos pontos de descontinuidade dessa função.

Teorema 7.15

Seja $f : [a,b] \to R$ uma função limitada. f é integrável, se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula.

Propriedades da Integral

Teorema 7.16

Uma função $f : [a,b] \to R$ é integrável, se, e somente se, f é integrável em [a,c] e [c,b], em que $a < c < b$. No caso de integrabilidade de f, temos

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f .$$

Demonstração

Exercício

Dizemos que $f:[a,b]\to R$ é uma **função-escada,** quando existem uma partição $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ de $[a,b]$ e números $c_1,c_2,...,c_n$, tais que $f(x)=c_i$, quando $x_{i-1}<x<x_i$.

Exercício 7.17

Toda função-escada é integrável e $\int_a^b f=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i-x_{i-1})$. Justifique essa afirmação.

No teorema 7.16, a igualdade $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$ faz sentido, apenas quando $a<c<b$. Para que a igualdade seja verdadeira para quaisquer números reais a,b,c, faremos duas convenções: (i) $\int_a^a f=0$ e (ii) $\int_b^a f=-\int_a^b f$.

O teorema, a seguir, apresenta outras propriedades das funções integráveis.

Teorema 7.18

Sejam $f,g:[a,b]\to R$ funções integráveis. Então:

(i) a soma $f+g$ é integrável e $\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$;

(ii) o produto $f.g$ é integrável.

(iii) se c$\in R$ é uma constante, $\int_a^b cf=c\int_a^b f$;

(iv) se $0 < k \leq |g(x)|$, $\forall x \in [a,b]$, então, o quociente $\dfrac{f}{g}$ é integrável;

(v) Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, então, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;

(vi) $|f|$ é integrável e $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Demonstração

Exercício

A integral como limite de somas de Riemann

Veremos, agora, como a integral de uma função definida em um intervalo [a,b] pode ser interpretada como limite de uma soma, chamada soma de Riemann.

Seja $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma partição de [a,b] e $C = \{\xi_1, \xi_2, ...\xi_n\}$ um conjunto de n pontos, tais que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. A **soma de Riemann** da função f, referente à partição P e aos pontos ξ_i de C é definida pela expressão

$$\sigma(f, P, C) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Dada uma partição $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de [a,b], definimos a norma de P como o número $|P|$ = maior comprimento $x_i - x_{i-1}$ dos subintervalos de P.

Exemplo 7.19

A soma superior $S(f,P)$ e a soma inferior $s(f,P)$ são somas de Riemann, quando a função f é contínua.

O resultado, a seguir, que não demonstraremos, relaciona a integral de uma função definida em um intervalo [a,b] com a soma de Riemann dessa função, nesse intervalo.

Teorema 7.20

Se f é uma função integrável no intervalo [a,b], então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

independentemente da escolha dos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Para uma demonstração desse teorema, você pode consultar Ávila (1999, p. 158) ou Lima (2007, p. 137).

Aula 3 – Teorema Fundamental do Cálculo, mudança de variáveis e integração por partes

Objetivos

- Calcular integrais definidas, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e integração por partes.
- Demonstrar teoremas do valor médio para integrais.

Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta seção, veremos uma importante relação entre os conceitos de derivada e de integral, que é o chamado Teorema Fundamental do Cálculo.
O teorema, a seguir, é chamado teorema da média e será usado posteriormente.

Teorema 7.21

Seja f uma função contínua num intervalo [a,b]. Então, existe $c \in [a,b]$, tal que.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Demonstração

Como f é contínua, então, pelo teorema 7.12, f é integrável. Sejam m e M o mínimo e o máximo de f, respectivamente, em [a,b]. Temos, também, que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Pelo Teorema 5.25 (do Valor Intermediário), existe $c \in [a,b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Teorema 7.22

Seja f uma função integrável num intervalo [a,b]. Então, a função F, definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad (7.7)$$

é contínua em [a,b].

Demonstração

Exercício

Teorema 7.23 (Fundamental do Cálculo)

Seja f uma função contínua em [a,b]. Então, a função F, definida pela equação (7.7), é derivável em todo ponto $x \in [a,b]$ e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração

Suponhamos que $x \in (a,b)$ e $|h|$ seja suficientemente pequeno, tal que $x+h \in [a,b]$.

Então:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt \, .$$

Como f é contínua em $[x, x+h]$, pelo teorema da média, existe $\bar{x}$ entre $x \; e \; x+h$, tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = (x+h-x)f(\bar{x}) = f(\bar{x})h$$

Então,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\bar{x}) \, .$$

Fazendo o limite, quando h tende a zero, temos que $\bar{x} \to x$. Como f é contínua, $f(\bar{x}) \to f(x)$; portanto, segue o resultado. Os casos $x = a \; ou \; x = b$ não oferecem maiores dificuldades. $F'(a) \; e \; F'(b)$ serão as derivadas de F à direita e à esquerda, respectivamente.

Uma função F é chamada uma **primitiva** de f em um intervalo I, se $F'(x) = f(x) \; \forall x \in I$.

O teorema fundamental do cálculo afirma que toda função contínua num intervalo [a,b] possui primitiva dada pela equação (7.7).

Usando o teorema do valor médio, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 7.24

Se F e G são primitivas de f num intervalo I, então, existe uma constante c, tal que $G(x) = F(x) + c$.

Demonstração

Exercício

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x)+c$ é chamada **integral indefinida** da função $f(x)$ e é denotada por $\int f(x)dx = F(x)+c$.

Observações 7.25

1) Pelo teorema 7.24, uma vez conhecida uma primitiva F de f, todas as suas primitivas são conhecidas. Sendo f contínua, uma primitiva particular de f é dada pela equação (7.7); logo, sua primitiva geral é

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + c. \qquad (7.8)$$

2) Da expressão (7.8), temos que

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt. \qquad (7.9)$$

Ou seja, para calcular a integral de uma função contínua f no intervalo [a,b], basta achar uma primitiva qualquer G de f e calcular a diferença $G(b)-G(a)$. É comum denotarmos $G(b)-G(a)$ por $G\big|_a^b$.

A integral na equação (7.9) é chamada **integral definida** de f no intervalo [a,b]. Essa nomenclatura segue do fato de que o resultado da integração é um número bem definido.

A seguir, apresentaremos dois métodos de integração muito usados nos cursos de Cálculo, para encontrar primitivas de funções, conhecidas como substituição e interação por partes.

Teorema 7.26 (Mudança de variáveis)

Sejam $f:[a,b]\to R$ uma função contínua, $g:[c,d]\to R$, com derivada contínua, tal que $g([c,d])\subset[a,b]$. Então,

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)).g'(t)dt\,.$$

Demonstração

Como f é contínua, pelo teorema fundamental do cálculo, f possui uma primitiva $F:[a,b]\to R$ e, além disso,

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d))-F(g(c)).$$

Por outro lado, da regra da cadeia, temos que

$$(F\circ g)'(t) = F'(g(t)).g'(t) = f(g(t)).g'(t), \forall t\in[c,d].$$

Desse modo, $F \circ g : [c,d] \to R$ é uma primitiva da função contínua que, para cada $t \in [c,d]$, associa $f(g(t)).g'(t)$. Então:

$$\int_c^d f(g(t)).g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c)),$$

concluindo, assim, a demonstração do teorema.

Teorema 7.27 (Integração por partes)

Se $f, g : [a,b] \to R$ têm derivadas contínuas, então,

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = f.g\Big|_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx.$$

Demonstração

Da derivada do produto, temos que $(f.g)' = f.g' + f'g$. Ou seja, fg é uma primitiva para a função $f.g' + f'g$. Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo, $\int_a^b (fg)'(t)dt = f.g\Big|_a^b$. Por outro lado,

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f(x).g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = f.g\Big|_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx.$$

Exercícios 7.28

1) Calcule as integrais:

A) $\int_0^1 x e^x dx$;

B) $\int_{-1}^{1} x \cos x \, dx$;

C) $\int_{0}^{1} e^{x} \cos x \, dx$.

2) Sejam $f, p : [a,b] \to R$, f contínua e p integrável, com $p(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. Então, existe um número $c \in [a,b]$, tal que $\int_{a}^{b} f(x).p(x)dx = f(c).\int_{a}^{b} p(x)dx$.

Esse resultado é conhecido como teorema do valor médio para integrais.

unidade 8

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES REAIS E VARIÁVEL REAL

Objetivos

- Demonstrar que uma determinada sequência de funções converge uniformemente.
- Demonstrar que uma determinada sequência de funções converge simplesmente.
- Reconhecer a diferença entre convergência simples e convergência de funções.
- Demonstrar o critério de convergência de Cauchy para sequência de funções.
- Usar o teorema de Dini, para demonstrar que uma determinada sequência de funções converge uniformemente para uma determinada função.
- Calcular limite de sequência de integrais de funções e verificar se a convergência é uniforme ou não.
- Demonstrar que uma determinada série de funções converge uniformemente e absolutamente.
- Usar os testes de D'Alembert ou de Cauchy, para encontrar o intervalo de convergência de determinadas séries de potências.
- Encontrar uma função, representada por uma determinada série de potências.
- Encontrar uma representação de uma função, por série de potências, em um determinado intervalo.

Introdução

Você, certamente, em sua vida acadêmica, já se deparou com a situação de, a partir de um número $x \in R$, em geral, usando uma calculadora ou uma tabela, obter os valores de várias funções em x, por exemplo e^x, $\ln x$, $sen\, x$, $\cos x$, $tg\, x$, $arctg\, x$, além de outras funções transcendentes. Você sabe como as calculadoras calculam esses números ou como são construídas as tabelas com alguns valores dessas funções?

Nesta Unidade, veremos:

1) como as séries infinitas podem ser usadas para obter valores funcionais de certas funções, como as citadas anteriormente.

2) Se uma função $f(x)$ satisfaz certas condições, é possível expressar $f(x)$ como uma série infinita cujos termos contêm potências da variável x, conhecidas como séries de potências.

3) Que a representação de funções por série de potencias permite-nos calcular integrais de certas funções, que, no curso de Cálculo Integral, não eram possíveis de serem calculadas, como, por exemplo, $\int e^{-x^2} dx, \int sen(x^2) dx$.

As séries infinitas também podem ser utilizadas para estender as definições de funções, como e^x, $\ln x$, $sen\, x$, $\cos x$, $tg\, x$, $arctg\, x$, para o caso em que x é um número complexo $a+bi$, sendo $a, b \in R$. Entretanto, não trataremos desse conteúdo nesta disciplina.

Vimos, na Unidade anterior, que a integral indefinida é um método do cálculo que nos permite produzir novas funções, a partir de certas funções dadas, como é o caso para as funções contínuas, utilizando o teorema fundamental do cálculo. Nesta Unidade, veremos um outro método também importante, que é o de considerar limites de sequências de funções, assim como o processo de somar séries de funções.

Nesta Unidade, como nas Unidades 2 e 3, além de Ávila (1999), Bartle (1983), Lima (2007) e Figueiredo (1974), trabalhamos com Guidorizzi (2002) e Swokowski (1994). Esta Unidade está dividida em 2 aulas, que deverão ser estudadas em 7 dias, já incluída a entrega das tarefas, e versará sobre os seguintes conteúdos:

Aula 1: Convergência simples e convergência uniforme.

Aula 2: Séries de funções e séries de potências.

Na aula 1, inicialmente, serão introduzidas as definições de convergência simples ou pontual e de convergência uniforme de sequência de funções; em seguida, você verá que, se uma sequência de funções contínuas converge uniformemente para uma determinada função, esta será também uma função contínua; além de outros resultados.

Na aula 2, inicialmente, será introduzido o conceito de convergência uniforme de uma série de funções, em um determinado domínio, além de outros resultados, vistos na aula 1, agora adaptados para série de funções. Em seguida, será introduzida a definição de série de potências, intervalo de convergência de uma série de potências e os testes de D'Alembert e de Cauchy, para determinar o raio de convergência de uma série de potências. E, por último, será vista a representação de funções por meio de série de potências.

No decorrer de cada aula, você encontrará alguns exercícios para fixação e avaliação da aprendizagem.

Aula 1 - Convergência simples e convergência uniforme

Objetivos

- Demonstrar que uma determinada sequência de funções converge uniformemente.

- Demonstrar que uma determinada sequência de funções converge simplesmente.

- Reconhecer a diferença entre convergência simples e convergência uniforme.

- Demonstrar o critério de convergência de Cauchy para sequência de funções.

- Usar o teorema de Dini, para demonstrar que uma determinada sequência de funções converge uniformemente para uma determinada função.

- Calcular limite de sequência de integrais de funções e verificar se a convergência é uniforme ou não.

Nas Unidades 2 e 3, vimos que, para sequência e séries de números reais, há apenas uma noção de limite. Para sequências e séries de funções, há várias noções de limite. Trataremos, aqui, de duas noções mais comuns, que são "convergência simples" e "convergência uniforme".

Dizemos que uma sequência de funções $f_n : D \to R\ (n = 1, 2, \cdots)$ **converge simples ou pontualmente** para a função $f : D \to R$ quando, para todo $x \in D$, a sequência de números reais $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ converge para $f(x)$. Notação: $f_n \to f$ simplesmente.

Em outras palavras, dizemos que $f_n \to f$ simplesmente em D, quando, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in D$, existe $n_0 \in N$ (que depende de ε e de x), tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Podemos pensar graficamente do seguinte modo: em cada reta vertical que passa por um ponto $x \in D$, temos uma sequência de pontos $(x, f_1(x)), (x, f_2(x)), \cdots (x, f_n(x)), \cdots$, que são obtidos, a partir da interseção dessa reta com os gráficos das funções $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$. Essa sequência de pontos converge para $(x, f(x))$.

Exemplo 8.1

A sequência de funções $f_n : R \to R\ (n = 1, 2, \cdots)$, definida por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, converge simplesmente para a função identicamente nula, definida em R.

De fato, $|f_n(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{x}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{|x|}{\varepsilon}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, considere $n_0 \in N, n_0 \geq \dfrac{|x|}{\varepsilon}$. Observe que o valor de n_0 depende de ε e de x.

Dizemos que uma sequência de funções $f_n : D \to R\ (n = 1, 2, \cdots)$ **converge uniformemente** para a função $f : D \to R$, quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ (que depende somente de ε), tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in D$.

Em outras palavras, dizemos que $f_n \to f$ uniformemente em D, quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ (que depende somente de ε), tal que, para todo $n > n_0$, os gráficos das funções f_n estão contidos na faixa de raio ε, em torno do gráfico de f.

Exemplo 8.2.

A sequência de funções $f_n : [0,1] \to R \ (n = 1, 2, \cdots)$, definida por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, converge uniformemente para a função identicamente nula em [0,1].

De fato, $|f_n(x) - 0| = \left|\dfrac{x}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, considere $n_0 \in N, n_0 \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$. Observe que, diferentemente do exemplo anterior, nesse caso, o valor de n_0 depende somente de ε.

Exercício 8.3

Demonstre que a sequência de funções $f_n : [a,b] \to R \ (n = 1, 2, \cdots)$, definida por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, converge uniformemente para a função identicamente nula em [a,b].

Observação 8.4

É imediato verificar que, se uma sequência (f_n) converge uniformemente, então, ela converge simplesmente. Entretanto, a recíproca dessa afirmação é falsa, como mostra o exercício, a seguir.

Exercício 8.5

Demonstre que a sequência de funções $f_n : [0,1] \to R$ $(n = 1, 2, \cdots)$, definida por $f_n(x) = x^n$, converge simplesmente para a função $f : [0,1] \to R$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ se \ 0 \leq x < 1 \\ 1, \ se \ x = 1. \end{cases}$$

Entretanto, a convergência não é uniforme.

Exercício 8.6

Demonstre que uma sequência de funções $f_n : D \to R$ $(n = 1, 2, \cdots)$ converge uniformemente para uma função $f : D \to R$, se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in N$, tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in D$ e para todos $m, n > n_0$. Esse resultado é conhecido como critério de convergência de Cauchy.

No exercício 8.5, tínhamos uma sequência de funções contínuas que converge simplesmente para uma função que não é contínua. O mesmo não pode acontecer, quando a convergência é uniforme, como mostra o resultado, a seguir.

Teorema 8.7

Seja $f_n : D \to R$ $(n = 1, 2, \cdots)$ uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente para uma função $f : D \to R$. Então, f é uma função contínua.

Demonstração

Dado $a \in D$, demonstraremos que a função f é contínua em a. Como f_n converge uniformemente para f, então, dado $\varepsilon > 0$, considere $n_0 \in N$, tal que

$\left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in D$. Como f_{n_0} é contínua em a, existe $\delta > 0$, tal que

$\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in D$, com $|x - a| < \delta$. Sabemos, também, que

$$\left|f(x) - f(a)\right| \le \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| + \left|f_{n_0}(a) - f(a)\right|.$$

Como cada parcela é menor do que $\frac{\varepsilon}{3}$, segue que, para todo $x \in D$, com $|x - a| < \delta$, temos que $\left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$. Ou seja, f é contínua em a.

Observação 8.8

À luz do teorema anterior, uma vez que sabemos que a sequência de funções do exercício 8.5 converge para a função descontínua $f : [0,1] \to R$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; se \; 0 \le x < 1 \\ 1, \; se \; x = 1, \end{cases}$$

temos que a convergência não é uniforme.

O teorema, a seguir, estabelece condições suficientes para que uma sequência de funções contínuas, definida em um conjunto compacto, convirja uniformemente.

Teorema 8.9 (Dini)

Seja $f_n : D \to R\ (n = 1, 2, \cdots)$ uma sequência de funções contínuas, sendo D um subconjunto compacto de R. Se (f_n) for monótona (não decrescente, $f_n \le f_{n+1}$ ou não crescente $f_n \ge f_{n+1}$) e (f_n) convergir simplesmente para uma função $f : D \to R$, então, a convergência é uniforme.

Para uma demonstração desse teorema, vide Lima (2007, p. 155).

Exercício 8.10

Use o teorema de Dini para demonstrar que a sequência de funções $f_n : [0,1] \to R\ (n = 1, 2, \cdots)$, definida por $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx}$, converge uniformemente para a função $f(x) = x$, definida em [0,1].

O resultado, a seguir, estabelece condições suficientes para que possamos trocar a ordem das operações de integração e de tomarmos o limite em uma sequência de funções integráveis.

Teorema 8.11

Se uma sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to R\ (n = 1, 2, \cdots)$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to R$, então, f é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx \,.$$

Demonstração

Como (f_n) converge uniformemente para f, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$, tal que, para todo $n > n_0$,

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \text{ e } |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

para todo $x, y \in [a,b]$. Fixado n nessas condições, como f_n é integrável, existe uma partição P de [a,b], tal que, indicando com ω_i e ω_i', respectivamente, as oscilações de f e f_n, no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P, temos que $\sum_{i=1}^{n}\omega_i'(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Para quaisquer $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, temos que

$$|f(x) - f(y)| = |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(y)] + [f_n(y) - f(y)]|.$$

Então:

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \qquad (8.1)$$

Assim, da equação (8.1), segue que

$$|f(x) - f(y)| \le \omega_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Desse modo, $\omega_i \le \omega_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n}\omega_i'(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Logo, f é integrável. Sabemos, também, que

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))dx\right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx\,.$$

Então, para $n > n_0$, temos que

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \le \frac{(b-a)\varepsilon}{4(b-a)} < \varepsilon .$$

Portanto, $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Exercício 8.12

Dada $f_n : [0,1] \to R$ $(n = 1, 2, \cdots)$, definida por $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, calcule:

1) $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

2) $\int_0^1 f(x)dx$.

3) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

4) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$?

5) (f_n) converge para f uniformemente? Justifique sua resposta.

A seguir, apresentamos um resultado que estabelece condições suficientes para que a derivada do limite de uma sequência de funções seja igual ao limite das derivadas dos termos da sequência.

Teorema 8.13

Seja $f_n : [a,b] \to R$ $(n = 1, 2, \cdots)$ uma sequência de funções com derivadas contínuas em [a,b], tal que f_n' converge uniformemente para $g : [a,b] \to R$. Suponhamos, ainda, que existe um ponto $c \in [a,b]$, tal que a sequência numérica $(f_n(c))$ converge. Então,

(f_n) converge uniformemente para uma função f, que é derivável e, além disso, $f' = g$. Ou seja, $(\lim_{n\to+\infty} f_n)' = \lim_{n\to+\infty} (f_n)'$.

Demonstração

Pelo teorema fundamental do cálculo, para cada $n \in N$ e $\forall x \in [a,b]$, temos que

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt\ .$$

Considerando o limite, quando n tender ao infinito, segue do teorema 8.11 que existe

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(c) + \int_c^t g(t)dt\ .$$

E, pelo teorema 8.7, g é contínua. Aplicando mais uma vez o teorema fundamental do cálculo, segue que f é derivável e $f'(x) = g(x), \forall x \in [a,b]$. Provaremos, agora, que (f_n) converge uniformemente para f. Como

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(c) - f(c) + \int_c^x f_n'(t)dt - \int_c^x g(t)dt \right| \le |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f_n'(t) - g(t)|dt\ .$$

Como (f_n') converge uniformemente para g, segue que (f_n) converge uniformemente para f.

Observação 8.14

A condição da convergência uniforme da sequência de derivadas é uma condição necessária no teorema, pois a sequência $f_n(x) = \dfrac{sen\, nx}{n}$, por exemplo, converge uniformemente para zero; no entanto, $f_n'(x) = \cos nx$ nem sequer converge.

Aula 2 - Séries de funções e séries de potências

Objetivos

- Demonstrar que uma determinada série de funções converge uniforme e absolutamente.
- Usar os testes de D'Alembert ou de Cauchy, para encontar o intervalo de convergência de determinadas séries de potências.
- Encontrar uma função, representada por uma determinada série de potências.
- Encontrar uma representação de uma função, por série de potências, em um determinado intervalo.

Séries de funções

Os conceitos de convergência simples e de convergência uniforme de sequências se estendem de maneira natural para séries, sendo estas interpretadas como sequências das reduzidas ou somas parciais. Desse modo, a convergência uniforme de uma série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

significa a convergência uniforme da sequência de somas parciais, ou reduzidas de ordem n,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\,.$$

Quando dizemos que uma série de funções $\sum f_n(x)$ **converge uniformemente** em um domínio D, para uma soma $f(x)$, significa dizer que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$, tal que $n > n_0 \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x) \right| < \varepsilon$.

A seguir, como em Ávila (1999), enunciaremos resultados vistos nesta Unidade, adaptados para os correspondentes às séries de funções, a saber:

Teorema 8.15 (Critério de Cauchy)

Uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum f_n(x)$ de funções com o mesmo domínio D seja convergente é que, dado $\varepsilon > 0$, exista $n_0 \in N$, tal que $n > n_0 \Rightarrow \left| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x) \right| < \varepsilon$, para todo $x \in D$ e qualquer inteiro positivo p.

Teorema 8.16

Seja $\sum f_n(x)$ uma série de funções contínuas, que converge uniformemente em um intervalo [a,b], para uma função $f:[a,b]\to R$. Então, f é uma função contínua e pode ser integrada termo a termo.

Teorema 8.17 (Dini)

Se $\sum f_n$ é uma série cujos termos são funções contínuas definidas em um conjunto compacto D, que converge monotonamente para uma função contínua $f(x)=\sum f_n(x)$, então, essa série converge uniformemente em D.

Teorema 8.18

Uma série de funções integráveis em um intervalo [a,b], que converge uniformemente nesse intervalo, tem por soma uma função integrável e

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx \,.$$

Teorema 8.19

Se uma dada série $\sum f_n(x)$ é tal que a série das derivadas $\sum f_n'(x)$ converge uniformemente para $g(x)$ em um intervalo, e se $\sum f_n(c)$ converge, sendo c um ponto desse intervalo, então, a soma f, da série original, é derivável nesse intervalo e $f' = g$.

A seguir, enunciaremos um resultado conhecido como teste M de Weierstrass, que é muito útil para verificar se uma dada série de funções converge uniformemente.

Teorema 8.20

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série funções $f_n : D \to R\ (n = 1, 2, \cdots)$. Suponha que

$$|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in D \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty .$$

Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniforme e absolutamente.

Exercício 8.21

Usando o teorema 8.20, demonstre que as séries, a seguir, convergem uniforme e absolutamente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, nx}{n^{1+\alpha}}, \alpha > 0$.

Séries de potências

Nesta seção, trataremos das séries de potências e das funções que podem ser expressas por meio dessas séries.

Uma **série de potências** é uma expressão do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, em que a_n são números reais, $\forall n \in N$. Os números a_n são chamados **coeficientes da série**.

Para simplificar a notação, trataremos do caso em que $a=0$, ou seja, as séries da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. O caso geral reduz-se a esse por meio da mudança de variável $y = x - a$. E os resultados obtidos para essas últimas séries podem ser adaptados facilmente para as primeiras séries.

É importante percebermos que, fixado x, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é uma série numérica e, portanto, podemos questionar se a mesma converge ou não. E, para respondermos a essa pergunta, usamos a teoria estudada na Unidade 3.

A partir de agora, procederemos no sentido de respondermos às seguintes perguntas com relação à série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

1) para que valores reais de x a série converge?

2) Quais funções $f(x)$ podem ser expressas por meio de uma série de potências; ou seja, pela forma $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

No sentido de responder à primeira pergunta, é claro que, para $x=0$, a série de potências converge para zero. A seguir, temos um resultado relacionado à convergência dessas séries para outros valores de x.

Teorema 8.22

Dada uma série de potências $\sum a_n x^n$, temos duas possibilidades:

a) ou a série converge apenas para $x=0$,

b) ou existe r, com $0<r\leq+\infty$, tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r,r)$ e, quando $0<r<+\infty$, diverge fora do intervalo fechado $[-r,r]$. Quando $0<r<+\infty$, nos extremos $-r$ *e* r, a série pode convergir ou divergir.

O número r, que aparece no item (b) do teorema, chama-se **raio de convergência** da série. O conjunto dos valores de x para os quais a série de potências $\sum a_n x^n$ converge, quando $0<r<+\infty$, é um intervalo da forma $(-r,r)$, $(-r,r]$,

$[-r,r)$ ou $[-r,r]$. E é chamado **intervalo de convergência** da série. Quando $r=+\infty$, o intervalo de convergência será $(-\infty,+\infty)$.

Nossa principal pergunta agora é: como encontrar o intervalo de convergência de uma série de potências?

A fim de solucionarmos esse problema, utilizamos o teste de Cauchy ou o teste de d'Alembert, vistos na Unidade 3:

Dada a série de potências $\sum a_n x^n$, podemos calcular o raio de convergência r de duas formas:

1) como $r=\dfrac{1}{L}$, se existir $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>0$, ou

2) como $r=\dfrac{1}{L}$, se existir $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>0$, para as séries, tais que, $a_n \neq 0, \forall n \in N$.

Quando $L=0$, o raio de convergência será $r=+\infty$.

Exercícios 8.23

Usando os testes de d'Alembert ou de Cauchy, encontre o intervalo de convergência de cada uma das séries, a seguir.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Para responder à segunda pergunta feita no início desta seção, iniciamos com algumas considerações, que passaremos a apresentar.

Uma série de potências $\sum a_n x^n$ define uma função $f(x)$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Mais especificamente, para cada x, nesse intervalo, temos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nesse caso, dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é uma **representação de $f(x)$ por meio de uma série de potências**, ou que $f(x)$ é **representada** pela série de potências.

Exemplo 8.24

A função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é representada pela série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $x \in R, |x| < 1$, pois a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge, nesse intervalo, para $\frac{1}{1-x}$. Ou seja, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $x \in R, |x| < 1$.

Exercício 8.25

Usando o exemplo anterior, encontre uma função representada pela série de potências

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, para $x \in R, |x| < 1$.

O resultado, a seguir, que não demonstraremos, neste texto, estabelece condições suficientes para que possamos derivar ou integrar termo a termo uma série de potências.

Teorema 8.26

Suponha que uma série de potências $\sum a_n x^n$ tenha raio de convergência $r > 0$ e seja

$f(x)$ uma função definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, para todo x, no intervalo de

convergência. Se $-r < x < r$, então,

a) $f(x)$ é derivável,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \text{ e}$$

b) $\int_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \dfrac{x^2}{2} + a_2 \dfrac{x^3}{3} + \cdots + a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Observação 8.27.

1) As séries em (a) e (b), obtidas por diferenciação e integração, respectivamente, têm o mesmo raio de convergência da série original $\sum a_n x^n$. No entanto, a convergência, nos extremos do intervalo de convergência, $x = -r \; e \; x = r$, pode se modificar. Nesses casos, é necessário verificar se as novas séries convergem, mediante os métodos estudados na Unidade 3.

2) Se r é o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$, então, a função

$f:(-r,r) \to R$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é de classe C^{∞} e $\forall x \in (-r,r) \; e \; k \in N$,

temos que

$$f^{(k)}(x) = \sum n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^n .$$

Em particular, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

3) Sejam $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ séries de potências convergentes, no intervalo $(-r,r)$, e $D \subset (-r,r)$, um conjunto contendo 0, como ponto de acumulação. Se $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n, \forall x \in D$, então, $a_n = b_n, \forall n \geq 0$. Esse resultado estabelece a unicidade da representação em série de potências.

4) Quando a série de potências $\sum a_n(x-a)^n$ tem raio de convergência $r>0$, dizemos que ela é a série de Taylor, em torno do ponto a, da função $f:(a-r,a+r)\to R$, definida por $f(x)=\sum a_n(x-a)^n$. Essa terminologia é devido ao fato de que a soma dos $n+1$ termos dessa série forma o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a. Quando $a=0$, a série de Taylor é chamada série de Maclaurin.

Observações 8.28

1) A partir do exercício 8.23(1) e do teorema 8.26, podemos demonstrar que, para todo $x\in R$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots. \quad (8.2)$$

E, daí, obtemos, por exemplo, o número real e como uma soma de uma série convergente de termos positivos

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

2) Considerando a equação (8.2), podemos encontrar representação por série de potências das funções hiperbólicas $\cosh x, senh\, x, e^{-x^2}$, dentre outras importantes funções. E, a partir do teorema 8.26, calcular suas respectivas integrais.

Exercícios 8.29

1) A partir da função encontrada no exercício 8.25 e usando o teorema 8.26, obtenha uma representação por série de potências da função $g(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, para $x \in R, |x| < 1$.

2)

a) Encontre uma representação em série de potências para a função $h(x) = \ln(1+x)$, se $x \in R, |x| < 1$.

b) Use o item (a) para calcular $\ln(1{,}1)$.

3) Encontre uma representação por série de potências para a função $arctg\, x$, para $x \in R, |x| < 1$.

PARA FINAL DE CONVERSA...

Que bom que você chegou ao final desta disciplina. Essa chegada é fruto de sua vontade, dedicação e persistência. Sabemos que não foi fácil esta caminhada.

Certamente, ao cursar esta disciplina, você revisou vários conteúdos e adquiriu novos conhecimentos, que serão indispensáveis para você continuar os estudos em Matemática, além de proporcionar a você mais autoconfiança em sua vida profissional.

Queremos destacar que nosso objetivo, ao longo desses 60 dias, não foi esgotar o estudo dos conteúdos abordados, o que seria uma tarefa impossível, mas proporcionar a você conhecimentos fundamentais, para estudar novas disciplinas, tanto nesta pós-graduação quanto em outros estudos que você desejar realizar na área de Matemática.

Esperamos que esta apostila tenha sido agradável e proveitosa para você, assim como nos sentimos ao escrevê-la.

Desejamos a você sucesso em seus estudos. Estamos muito felizes por termos estado com você nesta etapa de sua vida.

Cordialmente,

Os autores.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática**. São Paulo: Blücher, 1999.

BARTLE, R. G. **Elementos de Análise Real**. Rio de Janeiro: Campus, 1983.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 1974.

FLEMMING, D.M.; Gonçalves, M.B. **Cálculo A**. São Paulo: Pearson, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2002. v. 4.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção Matemática Universitária)

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1977.

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 1994. v. 2.