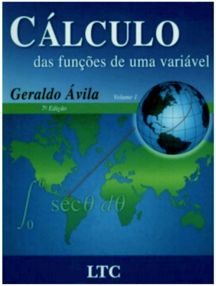
NÚMEROS REAIS

Carlos Alberto Raposo da Cunha
www.carlosraposo.com.br



NÚMEROS REAIS

Nesta aula, faremos uma breve introdução aos números reais. Nossa referência é [1]. Começamos recordando conjuntos numéricos já conhecidos do ensino médio.

Conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

Conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

Conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0\}$$

[1] AVILA, G. Cálculo Vol 1. 7a Ed. Rio de Janeiro, LTC, 2011.

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

NÚMEROS REAIS

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} =$$

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} =$$

NÚMEROS REAIS

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} =$$

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \text{“Parte decimal finita”}$$

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \text{“Parte decimal finita”}$$

$$\frac{17}{20} =$$

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \text{“Parte decimal finita”}$$

$$\frac{17}{20} = \frac{17x5}{20x5} =$$

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \text{“Parte decimal finita”}$$

$$\frac{17}{20} = \frac{17x5}{20x5} = \frac{85}{100} =$$

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \text{“Parte decimal finita”}$$

$$\frac{17}{20} = \frac{17x5}{20x5} = \frac{85}{100} = 0,85$$

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \text{“Parte decimal finita”}$$

$$\frac{17}{20} = \frac{17x5}{20x5} = \frac{85}{100} = 0,85 \quad \text{“Parte decimal finita”}$$

Os números racionais, isto é, as frações podem ser representadas em forma decimal:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \text{“Parte decimal finita”}$$

$$\frac{17}{20} = \frac{17x5}{20x5} = \frac{85}{100} = 0,85 \quad \text{“Parte decimal finita”}$$

Estes números possuem uma propriedade em comum:a parte decimal é finita. Isto é uma consequência de termos conseguido introduzir fatores 2 ou 5 no denominador

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

$$\frac{5}{6} =$$

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{3x2} =$$

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{3x2} = 0,833.....$$

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{3x2} = 0,833.....$$ “Parte decimal periódica”

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{3x2} = 0,833.....$$ “Parte decimal periódica”

$$\frac{3}{22} =$$

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{3x2} = 0,833.....$$ “Parte decimal periódica”

$$\frac{3}{22} = \frac{3}{2x11} =$$

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{3x2} = 0,833..... \quad \text{“Parte decimal periódica”}$$

$$\frac{3}{22} = \frac{3}{2x11} = 0,1363636.....$$

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{3x2} = 0,833..... \quad \text{“Parte decimal periódica”}$$

$$\frac{3}{22} = \frac{3}{2x11} = 0,1363636..... \quad \text{“Parte decimal periódica”}$$

Por outro lado, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração, em sua forma irredutível terá representação decimal periódica:

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{3x2} = 0,833..... \quad \text{“Parte decimal periódica”}$$

$$\frac{3}{22} = \frac{3}{2x11} = 0,1363636..... \quad \text{“Parte decimal periódica”}$$

Vimos assim, que as representações decimais das frações são de dois tipos apenas:
“decimais finita” ou “decimais periódicas”

Existem números cuja representação decimal não é finita nem periódica ?

Existem números cuja representação decimal não é finita nem periódica ? A resposta é sim. É fácil produzir números com esta propriedade; por exemplo:

$$0,121314151617.....$$

Existem números cuja representação decimal não é finita nem periódica ? A resposta é sim. É fácil produzir números com esta propriedade; por exemplo:

$$0,121314151617.....$$

$$3,1234567891011.....$$

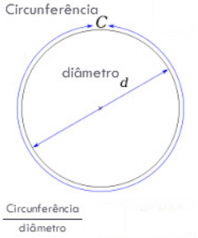
Existem números cuja representação decimal não é finita nem periódica ? A resposta é sim. É fácil produzir números com esta propriedade; por exemplo:

$$0,121314151617.....$$

$$3,1234567891011.....$$

Os números cuja representação decimal não é finita nem é periódica são denoniminados **números irracionais** .

Um exemplo importante de número irracional é obtido quando dividimos o comprimento de uma circunferência pelo se diâmetro.

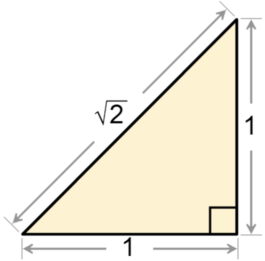


O resultado desta divisão é

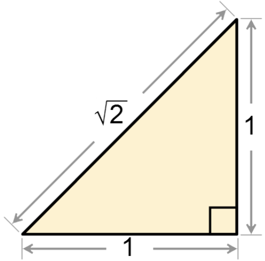
$$\pi = 3,14159265358979.......$$

NÚMEROS REAIS

Um outro número irracional é $\sqrt{2}$.

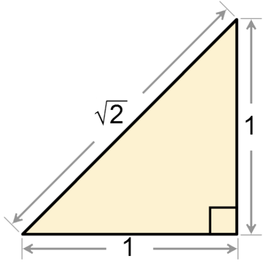


Um outro número irracional é $\sqrt{2}$.



A demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional pode ser encontrada em [1] página 3.

Um outro número irracional é $\sqrt{2}$.



A demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional pode ser encontrada em [1] página 3.
O conjunto dos números irracionais iremos denotar por

$$\mathbb{R} - -\mathbb{Q}.$$

NÚMEROS REAIS

Número real que denotaremos por $\mathbb{R}$ é todo número que é

racional ou irracional.

Número real que denotaremos por $\mathbb{R}$ é todo número que é

racional ou irracional.

Neste curso, sempre que falarmos em número, sem qualquer qualificação, entenderemos tratar-se de número real.

NÚMEROS REAIS

Número real que denotaremos por $\mathbb{R}$ é todo número que é

racional ou irracional.

> Neste curso, sempre que falarmos em número, sem qualquer qualificação, entenderemos tratar-se de número real.

Em geral representamos os números reais como pontos de uma reta.

Os intervalos são subconjuntos de $\mathbb{R}$ que utilizaremos aos longo deste curso, vejamos alguns exemplos:
Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x < b\}$

Os intervalos são subconjuntos de $\mathbb{R}$ que utilizaremos aos longo deste curso, vejamos alguns exemplos:

Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; a < x < b\}$

Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \; : \; a \leq x \leq b\}$

Os intervalos são subconjuntos de $\mathbb{R}$ que utilizaremos aos longo deste curso, vejamos alguns exemplos:
Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$

Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$

Intervalo aberto na extremidade esquerda e fechado na extremidade direita: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}$

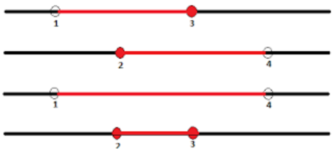
Os intervalos são subconjuntos de $\mathbb{R}$ que utilizaremos aos longo deste curso, vejamos alguns exemplos:
Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x < b\}$

Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \, : \, a \leq x \leq b\}$

Intervalo aberto na extremidade esquerda e fechado na extremidade direita: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x \leq b\}$

Intervalo fechado na extremidade esquerda e aberto na extremidade direita: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, a \leq x < b\}$

Vejamos um exemplo de como representamos intervalos na reta real. Observe nas figuras



onde temos respectivamente

$$(1,3] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 1 < x \leq 3\},$$

$$[2,4) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 \leq x < 4\},$$

$$(1,4) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 1 < x < 4\},$$

$$[2,3] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 \leq x \leq 3\}.$$

Vamos finalizar esta aula, apresentando a técnica de obter uma fração a partir de uma dízima periódica.

Vamos finalizar esta aula, apresentando a técnica de obter uma fração a partir de uma dízima periódica. Seja

$$x = 0,77777....$$

Vamos finalizar esta aula, apresentando a técnica de obter uma fração a partir de uma dízima periódica. Seja

$$x = 0,77777....$$

então

$$10x = 7,77777....$$

Vamos finalizar esta aula, apresentando a técnica de obter uma fração a partir de uma dízima periódica. Seja

$$x = 0,77777....$$

então

$$10x = 7,77777....$$

isto é,

$$10x = 7 + 0,77777....$$

Vamos finalizar esta aula, apresentando a técnica de obter uma fração a partir de uma dízima periódica. Seja

$$x = 0,77777....$$

então

$$10x = 7,77777....$$

isto é,

$$10x = 7 + 0,77777....$$

logo temos

$$10x = 7 + x$$

Vamos finalizar esta aula, apresentando a técnica de obter uma fração a partir de uma dízima periódica. Seja

$$x = 0,77777....$$

então

$$10x = 7,77777....$$

isto é,

$$10x = 7 + 0,77777....$$

logo temos

$$10x = 7 + x$$

ou seja,

$$10x - x = 7$$

Vamos finalizar esta aula, apresentando a técnica de obter uma fração a partir de uma dízima periódica. Seja

$$x = 0,77777....$$

então

$$10x = 7,77777....$$

isto é,

$$10x = 7 + 0,77777....$$

logo temos

$$10x = 7 + x$$

ou seja,

$$10x - x = 7$$

e assim,

$$9x = 7$$

Vamos finalizar esta aula, apresentando a técnica de obter uma fração a partir de uma dízima periódica. Seja

$$x = 0,77777....$$

então

$$10x = 7,77777....$$

isto é,

$$10x = 7 + 0,77777....$$

logo temos

$$10x = 7 + x$$

ou seja,

$$10x - x = 7$$

e assim,

$$9x = 7$$

o que resulta em

$$x = \frac{7}{9}$$

Vejamos outro exemplo.

Vejamos outro exemplo. Seja

$$x = 1,777777....$$

Vejamos outro exemplo. Seja

$$x = 1,777777....$$

então

$$10x = 17,777777....$$

Vejamos outro exemplo. Seja

$$x = 1,777777....$$

então

$$10x = 17,777777....$$

isto é,

$$10x = 17 + 0,77777....$$

Vejamos outro exemplo. Seja

$$x = 1,777777....$$

então

$$10x = 17,777777....$$

isto é,

$$10x = 17 + 0,77777....$$

logo temos

$$10x = 16 + 1 + 0,77777$$

Vejamos outro exemplo. Seja

$$x = 1,777777....$$

então

$$10x = 17,777777....$$

isto é,

$$10x = 17 + 0,77777....$$

logo temos

$$10x = 16 + 1 + 0,77777$$

ou seja,

$$10x = 16 + 1,77777$$

Vejamos outro exemplo. Seja

$$x = 1,777777....$$

então

$$10x = 17,777777....$$

isto é,

$$10x = 17 + 0,77777....$$

logo temos

$$10x = 16 + 1 + 0,77777$$

ou seja,

$$10x = 16 + 1,77777$$

e assim,

$$10x = 16 + x$$

Vejamos outro exemplo. Seja

$$x = 1,777777....$$

então

$$10x = 17,777777....$$

isto é,

$$10x = 17 + 0,77777....$$

logo temos

$$10x = 16 + 1 + 0,77777$$

ou seja,

$$10x = 16 + 1,77777$$

e assim,

$$10x = 16 + x$$

o que resulta em

$$x = \frac{16}{9}$$

Seja

$$x = 0,232323....$$

Seja

$$x = 0,232323....$$

então

$$100x = 23,232323....$$

Seja

$$x = 0,232323....$$

então

$$100x = 23,232323....$$

isto é,

$$100x = 23 + 0,232323....$$

Seja

$$x = 0,232323....$$

então

$$100x = 23,232323....$$

isto é,

$$100x = 23 + 0,232323....$$

logo temos

$$100x = 23 + x$$

Seja

$$x = 0,232323....$$

então

$$100x = 23,232323....$$

isto é,

$$100x = 23 + 0,232323....$$

logo temos

$$100x = 23 + x$$

ou seja,

$$100x - x = 23$$

Seja

$$x = 0,232323....$$

então

$$100x = 23,232323....$$

isto é,

$$100x = 23 + 0,232323....$$

logo temos

$$100x = 23 + x$$

ou seja,

$$100x - x = 23$$

e assim,

$$99x = 23$$

Seja

$$x = 0,232323....$$

então

$$100x = 23,232323....$$

isto é,

$$100x = 23 + 0,232323....$$

logo temos

$$100x = 23 + x$$

ou seja,

$$100x - x = 23$$

e assim,

$$99x = 23$$

o que resulta em

$$x = \frac{23}{99}$$

Seja

$$x = 0,579579579....$$

Seja

$$x = 0,579579579....$$

então

$$1000x = 579,579579579....$$

Seja

$$x = 0,579579579....$$

então

$$1000x = 579,579579579....$$

isto é,

$$1000x = 579 + 0,579579579....$$

Seja

$$x = 0,579579579....$$

então

$$1000x = 579,579579579....$$

isto é,

$$1000x = 579 + 0,579579579....$$

logo temos

$$1000x = 579 + x$$

Seja

$$x = 0,579579579....$$

então

$$1000x = 579,579579579....$$

isto é,

$$1000x = 579 + 0,579579579....$$

logo temos

$$1000x = 579 + x$$

ou seja,

$$1000x - x = 579$$

Seja

$$x = 0,579579579....$$

então

$$1000x = 579,579579579....$$

isto é,

$$1000x = 579 + 0,579579579....$$

logo temos

$$1000x = 579 + x$$

ou seja,

$$1000x - x = 579$$

e assim,

$$999x = 579$$

Seja

$$x = 0,579579579....$$

então

$$1000x = 579,579579579....$$

isto é,

$$1000x = 579 + 0,579579579....$$

logo temos

$$1000x = 579 + x$$

ou seja,

$$1000x - x = 579$$

e assim,

$$999x = 579$$

o que resulta em

$$x = \frac{579}{999}$$

Atividade:

- (1) Reduza a forma de fração ordinária as seguintes dízimas periódicas.

$$0,090909..... \quad 5,212121..... \quad 21,454545..... \quad 0,123123123.....$$

- (2) Represente na reta os seguintes intervalos de números reais.

$$(-\infty, -2), \quad (-1, 2), \quad (1, 3], \quad [-1, 0), \quad [2, 4], \quad [0, +\infty)$$

- (3) Prove que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Próxima aula: Circunferência.

Carlos Alberto Raposo da Cunha
Departamento de Matemática e Estatística
Universidade Federal de São João del-Rei